LAS GEOMETRIAS NO EUCLIDEAS: GAUSS, LOBACHEVSKY Y BOLYAI

JOSE MARIA MONTESINOS AMILIBIA

Académico Numerario

Uno de los temas más fascinantes de la historia de las matemáticas es la cuestión de la geometría hiperbólica, también llamada geometría no euclídea, geometría de Lobachevski, o todavía geometría de Lobachevski y Bolyai.

La falta de unanimidad en torno al nombre que ha de aplicarse a esta geometría ya indica la existencia de cuestiones de prioridad, que en el caso presente se mezclan además con nacionalismos.

La verdad es que fueron muchos los que contribuyeron a la creación de la geometría hiperbólica. El Profesor A.Dou, en una interesante conferencia dentro de este mismo ciclo, nos ha hablado de *los precursores*. Estos son, entre otros, *Saccheri, Lambert, Schweikart, Taurinus y Weichter*. No pensemos que cada uno se benefició de los logros de los anteriores, como si hubiera habido un desarrollo genético de la geometría hiperbólica, porque no es así. Hubo, sí, cierta transmisión de conocimientos entre algunos de ellos, pero es mejor pensar que hubo brotes de genio, aparecidos en diferentes épocas y lugares, sometidos a las influencias culturales de la época en que nacieron, y que hicieron germinar la planta de la geometría hiperbólica y hacerla crecer, más o menos según las circunstancias, según el genio del autor y según las condiciones de fertilización recibidas de otros investigadores.

Y así, en esta primera etapa, el genio de los precursores llegó a desarrollar la teoría elemental de las paralelas en la hipótesis (*no euclídea*) de que el postulado 5°, o *axioma de las paralelas*, fuera falso. Supieron que había una medida absoluta de longitud. Conocieron la proporcionalidad entre área y defecto de un triángulo. Descubrieron la horosfera y su geometría euclídea, y desarrollaron heurísticamente, en fin, la trigonometría hiperbólica. Lo más sorprendente es que en algunos casos hicieron todo ello para demostrar que el axioma de las paralelas era una necesidad lógica. Es decir, construyeron para luego destruir.

Mi tarea en esta conferencia es hablar de los *fundadores* de la geometría hiperbólica. Indiscutiblemente son *Bolyai* y *Lobachevski* porque no sólo construyeron un sistema geométrico basado en la negación del axioma de las paralelas, sino que además estuvieron convencidos de su consistencia e intentaron demostrarla. Dejaré claro en esta conferencia que *Bolyai* y *Lobachevski* desarrollaron la geometría hasta el punto de introducir en ella sistemas de coordenadas, y obtener las fórmulas del elemento infinitesimal de longitud mediante la aplicación de las fórmulas trigonométricas. Con esto ya demostró posteriormente Beltrami la consistencia. Pero nuestros personajes, aunque percibían que la consistencia de la geometría estaba relacionada con la trigonometría y con las coordenadas, vivieron en época demasiado temprana como para penetrar en la entraña del problema. Sin quererlo, no obstante, pusieron las bases para la creación de las geometrías riemannianas (obra de Beltrami en dimensión dos [BE] y de Riemann, en general [RI]), y, en consecuencia, del maravilloso edificio geométrico de nuestro siglo.

¿Y qué hacía Gauss? Aislado en la torre de marfil de sus "meditaciones" había observado benevolentemente los esfuerzos de Schweikart y Taurinus, y declarado que todo ello era "copia de su alma". Había dado en sus cartas suficientes pruebas que atestiguan que conocía todo el edificio de Bolyai y Lobachevski bastante antes de que estos publicaran nada. Pero Gauss no quiso hacer públicos sus conocimientos: ¿Por qué? Daré en esta conferencia mi personal interpretación, con el ruego de que sea considerada como una mera hipótesis pendiente de confirmación.

Antes de entrar ya en materia, se impone destruir de una vez las opiniones que ven relación genética entre los descubrimientos de *Gauss, Bolyai* y *Lobachevski*. Se sabe que *Gauss* leyó a *Lambert* en Göttingen, en 1795 y 1797, donde también tuvo acceso a la obra de *Saccheri*; pero está ya establecido que ni *Bolyai*, por intermedio de su padre, ni *Lobachevski*, por el de *Bartels*, conocieron nada de las meditaciones de *Gauss*. Incluso se cree con fundamento que ni *Bolyai*, ni *Lobachevski* supieron nada de los precursores. Se piensa, con los datos que tenemos, que *Bolyai* y *Lobachevski* laboraron en perfecto aislamiento. Pero eran hijos de su época, y a través de otros, recibieron la influencia del pensamiento de Gauss, no de sus teoremas (ver [JB], [K], [HA]).

§1. Esbozo de biografía de Juan Bolyai.

Juan *Boyai* era hijo de Farkas Bolyai, quien mencionaremos luego en relación con *Gauss*. Nació el 15 de Diciembre de 1802 en Kolozsvár (ahora Cluj–Napoca, Rumanía) y murió el 27 de Enero de 1860. Detalles de su vida pueden verse en [JB]. Desde joven se interesó en el problema de las paralelas, sin duda influido por su padre, quien se había dedicado durante muchos años a este tema. Juan tenía muchas virtudes naturales. Era un talento para las matemáticas, frente a las cuales –al igual que su padre– mantenía una actitud competitiva, buscando a través de ellas la fama, como se trasluce de la correspondencia con su padre [JB].

Juan comenzó sus trabajos en geometría a la edad de 18 años. Había tenido como profesor de matemáticas a su mismo padre, pero como hemos indicado antes, está demostrado que trabajó libre de las influencias de *Gauss* que pudieran haberle venido a través de su padre, amigo y compañero de estudios de *Gauss* [JB]. Por ello, el logro de Juan es sencillamente formidable. Así debió pensarlo *Gauss* quien, habiendo leído la obra de *Bolyai*, escribió a *Gerling* (14 de Febrero de 1832) esto:

> "*Yo tengo a este joven geómetra Bolyai por un genio de primera magnitud*"
>
> ([G], p. 220).

Notable alabanza, viniendo del "príncipe de los matemáticos".
En el año académico 1820–1821, el joven Bolyai cursaba su último año en la Academia de Ingenieros Militares de Viena. Se ha encontrado su libro de ejercicios de Mecánica. En él aparecen las siguientes sugestivas figuras [JB]:

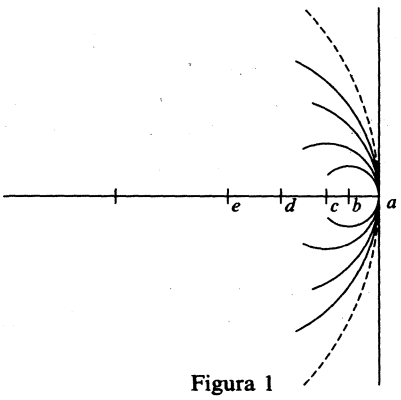


Figura 1

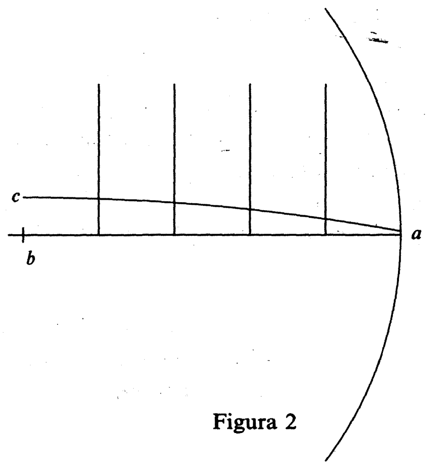


Figura 2

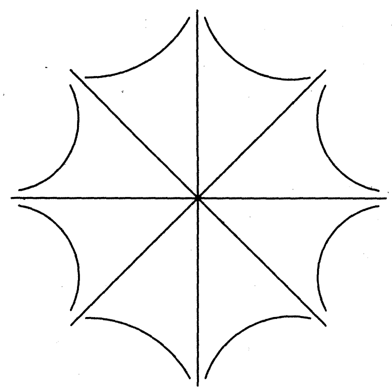


Figura 3

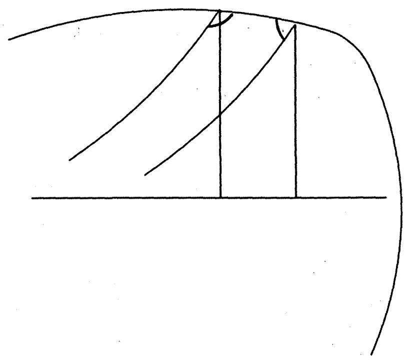


Figura 4

La Figura 1 es la génesis del horociclo. La Figura 2 parece la curva equidistante (ac) de una recta (ab). Además, aparece a la derecha de la Figura 2 una curva que recuerda el borde del dominio del modelo de Beltrami–Klein. No se piense que esto es descabellado: demostraré en otro lugar [M] que el modelo proyectivo de Klein estuvo perfectamente al alcance de los fundadores, sólo que no se dieron cuenta: ¿Se dió cuenta Bolyai? No especulemos más y vayamos a la Figura 3. Aquí vemos un octógono con sus vértices en el infinito, o equivalentemente la ilustración de la distancia cuyo ángulo de paralelismo es $\pi/8$. La Figura 4 no me sugiere nada inteligible.

Estas figuras, de por sí indican lo avanzado que el joven Bolyai se encontraba en sus investigaciones. Súbitamente, –rememora Juan [JB]–, en una noche invernal de 1823 vio la verdad; y trabajó frenéticamente, a la luz de una vela, durante noches sucesivas, realizando los cálculos que formarían el §29 del *Apéndice*. En 1824 parece que finalizó su trabajo.

Las conversaciones con su padre sobre el tema desilusionaron al hijo: el padre aunque seguía la hilación lógica, no *comprendía*. Dos generaciones distintas compe- tían, como mareas encontradas de aguas distintas que rehusaban mezclarse. Juan escribió entonces un primer manuscrito, ya en 1826, que se ha perdido. Finalmente, el padre acogió la obra de su hijo en forma de Apéndice a un libro suyo de geometría, que llevaba el siguiente curioso título:

> "*Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi*".

§2. El Apéndice.

El *Apéndice* fue tirado en forma de separatas antes que el *Tentamen*, el 20 de Junio de 1831, y el padre se apresuró a enviarlo a *Gauss* pidiéndole opinión. Más tarde veremos cuál fue ésta. Ahora examinaremos esta maravillosa obra atentamente.

El título completo es "*Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei* (a priori *haud unquam decidenda*) *independentem: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica*". (Apéndice. Que exhibe la ciencia del espacio absolutamente verdadera; esto es, la independiente de la verdad o falsedad del axioma XI de Euclides (*a priori* indecidible para siempre): a la que se adjunta –en caso de falsedad– una cuadratura geométrica del círculo). Nosotros lo llamaremos simplemente *Apéndice*, como por lo demás padre e hijo acostumbraban en sus cartas y conversaciones. Está muy bien escrito, en estilo conciso, en denso latín, con notación simbólica, sobria y sugestiva, con cuidado: "no es el quid de la cuestión lo que me preocupa –dice su autor– sino más bien el cómo expresarlo para obtener el efecto mejor y más saludable" [JB]. Véase, como ejemplo, la manera que tiene Bolyai de sacar a escena el número *e*, en la sección 30 de su libro. Se aprecia el esfuerzo que hace para que su aparición tenga "el efecto mejor" y más dramático.

El latín (que usa el Apéndice) era vehículo normal, entonces, de transmisión científica. *Lobachevski*, por el contrario, escribió en ruso, de limitada difusión (más tarde, también en francés y alemán). Su primera obra es de 1829 y contiene una laguna, detectada por *Bolyai* cuando éste leyó a Lobachevski, quien la corrigió a instancias suyas (ver [K], p.159, 309–310).

Las frívolas afirmaciones, alimentadas frecuentemente por fuentes rusas (y repetidas después sin empacho) de que la geometría hiperbólica es una invención de *Lobachevski*, y de que *Bolyai* contribuyó en mínima parte a ella, son sencillamente falsas. *Bolyai* desarrolló su *Apéndice* de modo magistral; independiente –como *Lobachevski*– de toda influencia; en un idioma científico; y sin lagunas importantes, lo que no puede absolutamente decirse de *Lobachevski*; aunque hay que afirmar la elegancia y sobriedad de las demostraciones de éste, y el mayor desarrollo que dio a su teoría.

Los dos, en fin, se yerguen frente a frente; complementándose; sin desmerecer nada; como los verdaderos creadores de esta parcela del ingenio humano. El crédito es de ambos, sin perjuicio del que merecen sus precursores.

Volviendo al *Apéndice*, se aprecia sobriedad telegráfica en la parte de Aplicaciones. Todo él está comprimido en poquísimas páginas. Parece que influyeron razones económicas. Sea lo que fuere, el lector tiene datos suficientes para reproducir lo que falta.

§3. El Apéndice: Preliminares.

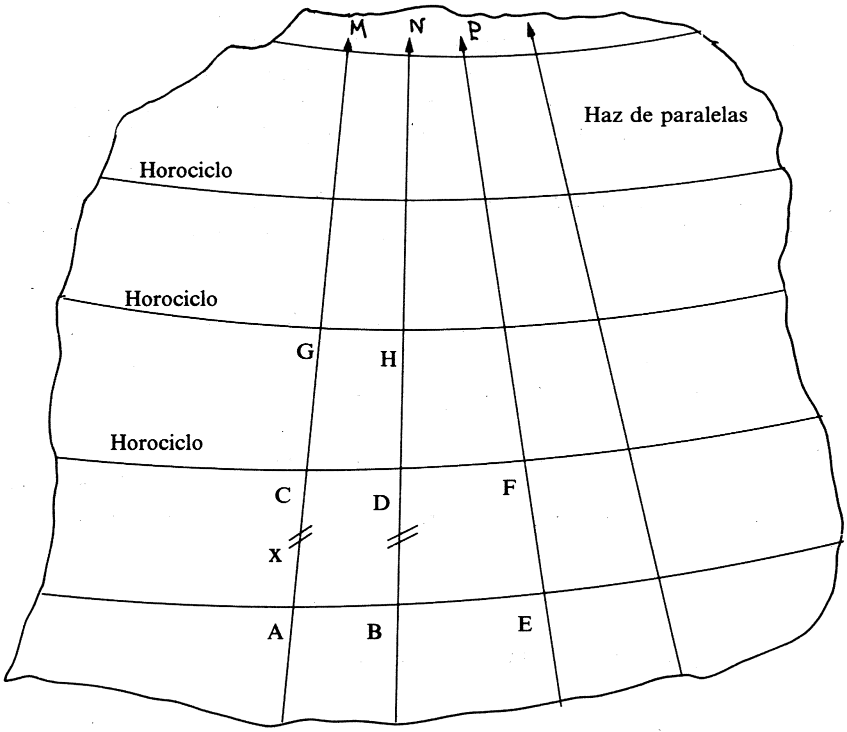
Consta de 43 secciones que ocupan 29 páginas. Diez secciones tratan de las paralelas y sus propiedades independientes del postulado euclídeo. Casi todo ello está en *Saccheri* y *Lambert*.

Define luego, y desarrolla, un concepto de la mayor importancia: la L–línea (u *horociclo* como diremos nosotros) y el concepto análogo de *horosfera*. *Gauss*, tras leer el *Apéndice*, sugirió al joven *Bolyai* que las llamara *paraciclos* y *parasferas*, siendo posiciones límite del círculo y esfera.

Estos conceptos eran también conocidos anteriormente, pero en las manos de *Bolyai* y *Lobachevski* se convierten en preciosas herramientas, para después, con maestría consumada, reducir el estudio hiperbólico al euclídeo. En efecto, ambos demuestran que la geometría de la horosfera es euclídea. Esto les permite obtener la trigonometría hiperbólica a partir de la euclídea. La idea es similar a la que se utiliza al derivar la trigonometría esférica de la euclídea. No deja de admirarme que tengan un concepto de la geometría tan moderno, que ven, sin empacho, geometría euclídea en una superficie que aparece "curva". Aquí, por tanto, hay un *modelo*, no canónico, *de la geometría euclídea*, que ellos conocen y utilizan conscientemente.

Bolyai considera tres tipos de curvas (o *ciclos*), los *horociclos*, los *hiperciclos* y las *circunferencias*. Son respectivamente, las trayectorias ortogonales a un haz de paralelas, a un haz ortogonal, y a un haz de rectas convergentes. Un haz ortogonal es el haz de rectas ortogonales a una dada: *base del haz*.

En §22 *Bolyai* demuestra que la distancia entre dos horociclos de un mismo sistema, medida a lo largo de una normal común (o *eje*) no depende del eje elegido:



$$\overline{AC} = \overline{BD}$$

Luego, en §23, prueba que

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}} = \frac{\overset{\frown}{AE}}{\overset{\frown}{CF}}$$

y concluye que "*la razón* $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}}$ *es independiente de la longitud de* $\overset{\frown}{AB}$ *y está completamente determinada por la distancia* $\overline{AC}$". Que sólo depende de la distancia es consecuencia de que dos horociclos cualesquiera son congruentes. Naturalmente, no es así con los restantes ciclos. Dos hiperciclos (resp. círculos) son congruentes si equidistan de su recta base (resp. centro). Si ponemos $\overline{AC} = x$, *Bolyai* llama X a

$\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}}$; nosotros pondremos $X = f(x)$, siguiendo el uso actual. El anterior, es uno de los principales teoremas del *Apéndice*.

Ahora en §24 obtiene la siguiente importante cosecuencia de lo anterior. Supóngase $\overline{AC} = \overline{CG} = x$. Entonces $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}} = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{GH}} = f(x)$ luego

$$f(2x) = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{GH}} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}} \cdot \frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{GH}} = f(x)^2$$

Es fácil ahora obtener que

$$\boxed{f(\lambda x) = f(x)^{\lambda},\ \lambda \ \text{real}}$$

Bellísimo resultado que está en la raíz de toda la teoría posterior. Así pues, *Bolyai* ha probado que $f(x)$ tiene la forma a^x, donde a es cierta constante.

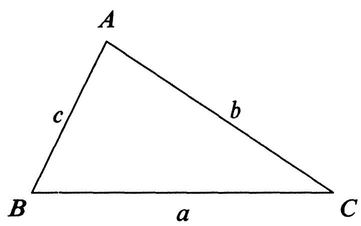
En §15, Bolyai denota con Σ al sistema geométrico basado en la hipótesis de que el postulado euclídeo es cierto; y, por S, al sistema geométrico basado en la hipótesis contraria. Denomina *absoluta* a la geometría que es "válida independientemente de cuál de los dos, Σ ó S, sea cierto en la realidad".

Siguiendo con §24, comenta *Bolyai* que en el sistema Σ se tiene $f(x) = 1$, para todo x, pero que en el S siempre es $f(x) > 1$. Concluye con la siguiente importante observación: "Dados entonces arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{ABE}$, existe $\overset{\frown}{CDF}$ con $\overset{\frown}{CDF} = \overset{\frown}{AB}$ y por tanto, la banda $(AM,\ BN)$ es congruente a la banda $(AM,\ EP)$. *Por extraño que este resultado parezca, sin embargo, no prueba todavía que el sistema S sea absurdo*". En el lenguaje actual ha probado que la geometría de un haz de paralelas es la geometría equiforme mientras que la de una horosfera es la geometría euclídea.

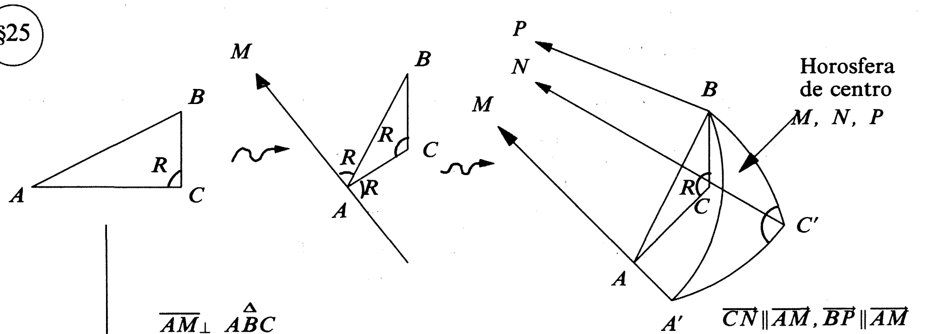
§4. El Apéndice: la trigonometría.

En §25 comienza *Bolyai* la trigonometría enunciando el siguiente hermosísimo teorema de geometría absoluta en cuyo enunciado hay que entender por *periferia* de un segmento la longitud de la circunferencia de radio el segmento: "*En todo triángulo rectilíneo los senos de sus ángulos son proporcionales a las periferias de lados opuestos*". El cuadro $\boxed{\text{§25}}$ trae la demostración.

De aquí resulta $\operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C = a : b : c$: para cualquier triángulo rectilíneo



§25



$\overline{AM} \perp \overset{\triangle}{ABC}$ $\qquad$ $\overline{CN} \parallel \overline{AM}, \overline{BP} \parallel \overline{AM}$

$\hat{A} = \hat{A}'$

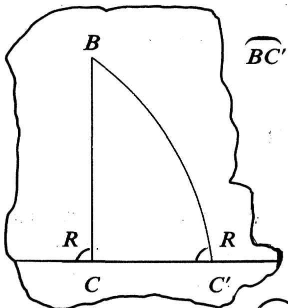
(Haz de planos de eje AM)$\perp$ $\overset{\triangle}{ABC}$

$$\left.\begin{matrix}(ACC'A') \perp \overset{\triangle}{ABC} \\ \overline{AC} \perp \overline{BC}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{BC} \perp (ACC'A') \Rightarrow (BCC') \perp (ACC'A')$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\overline{BC} \perp \overline{CC'} \qquad\qquad \hat{C}' = R$$

En el triángulo *euclídeo* rectángulo a C', $\overset{\triangle}{A'C'B}$ tendremos, pues $\hat{A} = \hat{A}'$:



$$\overset{\frown}{BC'} = \overset{\frown}{BA'} \operatorname{sen} \hat{A}' = \overset{\frown}{BA'} \operatorname{sen} \hat{A}$$

$$\Downarrow$$

$$2\pi \overset{\frown}{BC'} = 2\pi \overset{\frown}{BA'} \operatorname{sen} \hat{A}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{BC} = \text{BA} \operatorname{sen} \hat{A}$$

pues $\overline{BC} \perp \overline{CC'} \Rightarrow$ BC $= 2\pi \overset{\frown}{BC'}$; $\overline{BA} \perp \overline{AA'} \Rightarrow$ BA $= 2\pi \overset{\frown}{BA'}$.

Notación: x = longitud del círculo de radio rectilíneo x.

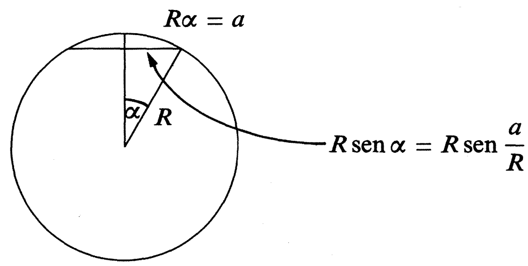
tanto en el sistema Σ como en el S. En el sistema Σ sabemos que $a = 2\pi a$, y se obtiene la ley de los senos de un triángulo euclídeo. Para avanzar en el sistema S hemos de obtener la fórmula de a en función de a (*rectificación del ciclo o circunferencia*). Esto ocupará a Bolyai las secciones §27, §28, §29 y §30.

Pero antes de entrar en ello, Bolyai procede a obtener, dentro de la geometría absoluta, las fórmulas de la trigonometría esférica. Creo que lo hace en este punto para resaltar más su procedimiento: así como para el teorema de los senos, comparó plano con horosfera y utilizó la geometría euclídea, ahora va a comparar plano con esfera, y mediatamente por tanto, esfera con horosfera. He aquí el teorema:

> "*En todo triángulo esférico los senos de los ángulos son proporcionales a los senos de los lados opuestos*".

Este resultado ocupa la §26, y es la versión esférica del teorema absoluto de los senos mencionados más arriba. En efecto, en una esfera de radio R, periferia de a vale:

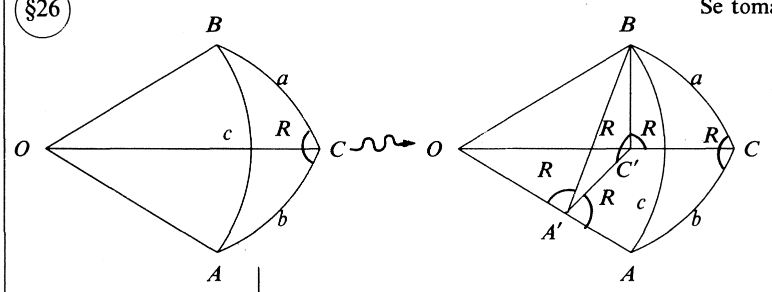
$$\textcircled{a} = 2\pi R \ \mathrm{sen}\, \frac{a}{R}.$$



La demostración del teorema anterior puede verse en el cuadro $\boxed{\S 26}$.

Así, la trigonometría esférica resulta independiente del postulado de las paralelas, como explícitamente indica Bolyai al final de §26. La demostración de este mismo teorema dada por *Lobachevski* es muy hermosa y causó la admiración de *Bolyai* quien –en sus notas privadas-escribió palabras muy elogiosas sobre el profesor ruso (véase [JB]). Pero pienso que la demostración de *Bolyai*, utilizando el teorema absoluto de los senos no es menos bella.

§26



Se toma $\overset{\triangle}{BA'C'} \perp OA$

$\Downarrow$

$\hat{A} = \hat{A}'$

(Haz de planos de eje OA)$\perp$ $\overset{\triangle}{BA'C'}$

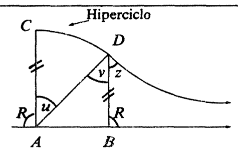
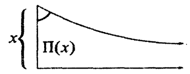
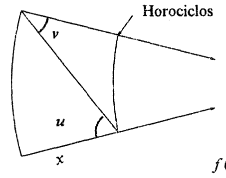
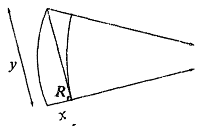
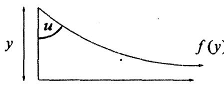
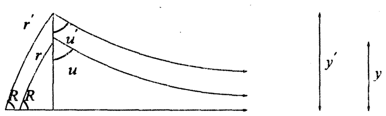
$$\left.\begin{array}{l}(AOC)\perp \overset{\triangle}{BA'C'}\\ (BOC)\perp (AOC)\end{array}\right\} \Rightarrow [(BA'C')\cap(BOC)]\perp (AOC) = \overline{BC'}\perp (AOC) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{BC'}\perp \overline{A'C'} \Rightarrow \hat{C}' = R\\ \overline{BC'}\perp \overline{OC}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lll}\overset{\triangle}{BA'C'} \text{ rectángulo} \Rightarrow & BC' = BA' & \operatorname{sen}\hat{A}\\ \overset{\triangle}{BC'O} \text{ rectángulo} \Rightarrow & BC' = OB & \operatorname{sen} a\\ \overset{\triangle}{BA'O} \text{ rectángulo} \Rightarrow & BA' = OB & \operatorname{sen} c\end{array}\right\} \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\hat{A}$$

de donde para cualquier triángulo esférico vale:

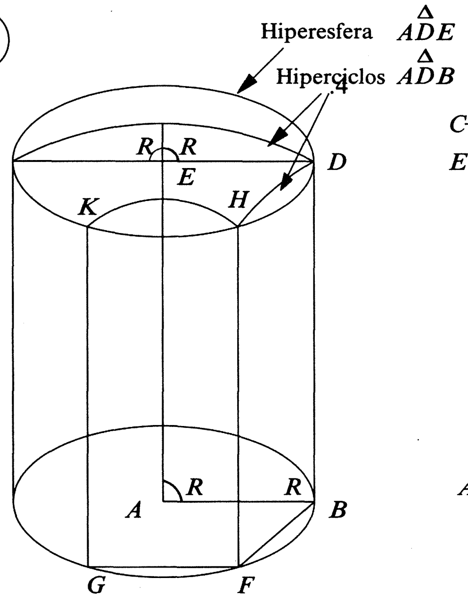
$$\operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} a : \operatorname{sen} b : \operatorname{sen} c$$

Los §§27, 28, 29, 30 son esenciales. Con el fin de orientar al lector incluyo un esquema orgánico de estas secciones (ver cuadro $\boxed{\text{dependencias}}$).

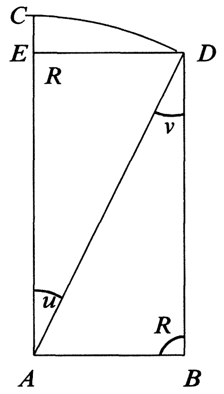
Dependencias	Contenido de las secciones	Observaciones
	§27  $\dfrac{\overset{\frown}{CD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} v} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ proporción que no depende por tanto de la distancia $\overline{AB}$	§27 contiene la *Rectificación del hiperciclo*: $\overset{\frown}{CD} = \overline{AB} \operatorname{sen} \Pi(\overline{BD})$ donde $\Pi(x)$ es el ángulo de paralelismo de la distancia x en notación de Lobachevski: 
	§28  $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} v}$	El siguiente caso particular lo utiliza Bolyai en §29:  $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \Pi(y)}$
	§29  $f(y) = \operatorname{ctg} \dfrac{1}{2} u$	O sea $f(y) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(y)$. En §30 utiliza la consecuencia: $\operatorname{ctg} u = \dfrac{1}{2}\left(f(y) - f(y)^{-1}\right)$
	§30 *Rectificación del ciclo*  CLAVE: $\boxed{y = 2\pi r}$; Hay que hallar r en función de y; Utiliza §27 para sacar $\dfrac{r}{\cot u} = k$ (constante independiente de r), luego $\boxed{r = k \cot u}$. *Hay que hallar k; Hay que hallar* $\cot u$ *en función de* y (esto es §29)	Otra consecuencia es $\dfrac{1}{\operatorname{sen} u} = \dfrac{1}{2}\left(f(y) + f(y)^{-1}\right)$ Esta sección son las *funciones trigonométricas de* $\Pi(y)$ *en función de* $f(y)$ $f(y) = f\left(\dfrac{y}{k} \cdot k\right) = f(k)^{y/k}$. Otro modo de obtener esto es el siguiente: Póngase $f(\rho) = e$, entonces $f(y) = e^{y/\rho}$: De §29: $\operatorname{ctg} u = \operatorname{Sh}(y/\rho)$ luego
	La constante k es tal que $f(k) = e$. $k = \dfrac{r}{y} \cdot \dfrac{y}{\frac{1}{2}\left(f(y) - f(y)^{-1}\right)} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{2y}{f(y) - f(y)^{-1}} =$ $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{2y f(y)}{f(y)^2 - 1} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{2y f(k)^{y/k}}{f(k)^{2y/k} - 1} = \dfrac{k}{\log f(k)} \Rightarrow f(k) = e$	$k = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y/\rho}{\operatorname{Sh}(y/\rho)} \cdot \rho = 1 \cdot \rho = \rho$ Pero Bolyai elige el efecto dramático de la aparición de e justo al final: $f(k) = e$. De este modo realza el significado de $\dfrac{r}{\cot u} = k$.
	$y = 2\pi r = 2\pi k \cot u = 2\pi k \operatorname{Sh}(y/k)$	$r = h \operatorname{Sh}(y/k)$ es la *rectificación del horociclo*

De este modo consigue la rectificación del ciclo (o circunferencia). Poniendo esto en relación con el teorema de los senos es posible ahora obtener toda la trigonometría. Antes de ello veamos con detalle las secciones §27 a §30.

§27



rectángulos $\Rightarrow$ $(ED) : (AD) : (AB) =$
$= \operatorname{sen} u : 1 : \operatorname{sen} v$

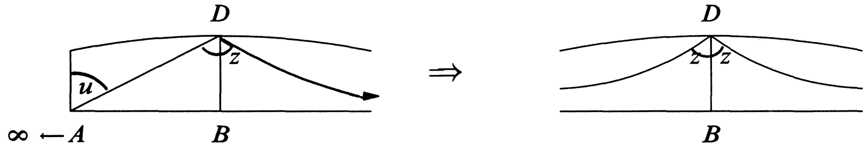


Afirmación sin demostración: "La razón de un arco de hiperciclo al segmento base no depende del tamaño del arco sino sólo de la distancia del hiperciclo a la recta base." Bolyai remite a §23 y sugiere al lector un razonamiento análogo. Como en §23 este argumento falta, aquí hay una laguna, pero no es seria y puede fácilmente remediarse.

De la afirmación se deduce

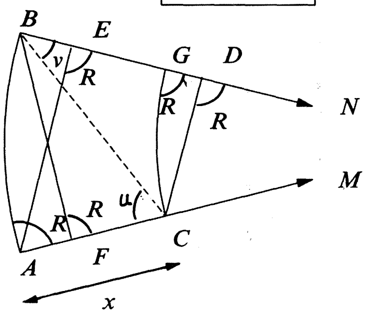
$$\frac{\overset{\frown}{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overset{\frown}{DH}}{\overline{BF}} = \frac{\overset{\frown}{HK}}{\overline{FG}} = \ldots = \varphi(\overline{BD}) \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{DH} + \overset{\frown}{HK} + \ldots}{\overline{BF} + \overline{FG} + \ldots} = \varphi(\overline{BD}) = \frac{\overset{\frown}{CD}}{AB},$$

pasando al límite tendremos
$$\frac{(ED)}{(AB)} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{AB} = \frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} v}$$



$u = R$, luego
$$\frac{\overset{\frown}{CD}}{AB} = \frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} v} = \frac{\operatorname{sen} R}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$$

§28 Queremos $\boxed{f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} v}}$



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{BFC} \Rightarrow BF = CB \operatorname{sen} u \\ \overset{\triangle}{CDB} \Rightarrow CD = CB \operatorname{sen} v \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(**) \quad \boxed{BF : CD = \operatorname{sen} u : \operatorname{sen} v}$$

$$(*) \left\{\begin{array}{l} \text{Como } \overline{BF} = \overline{AE} \text{ se concluye} \\ EA : CD = \operatorname{sen} u : \operatorname{sen} v \end{array}\right.$$

Ahora en las horosferas (euclídeas) de centro M, N se tiene

$$\frac{EA}{CD} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CG}} = f(x)$$

Observaciones: Para obtener

$$\frac{BF}{CD} = \frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} v}$$

Bolyai remite a §27. Es una errata: debe decir §25.

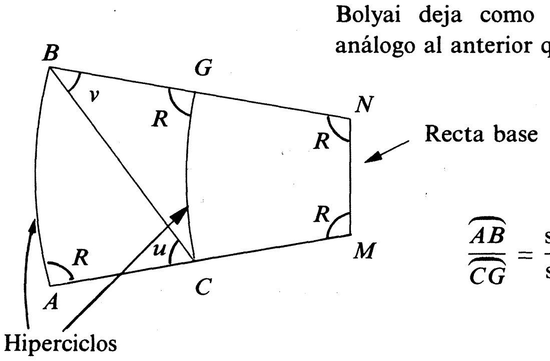
De (**), como

$$BF = 2\pi \overset{\frown}{AB} \qquad CD = 2\pi \overset{\frown}{GC}$$

Se deduce ya que $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} v}$;

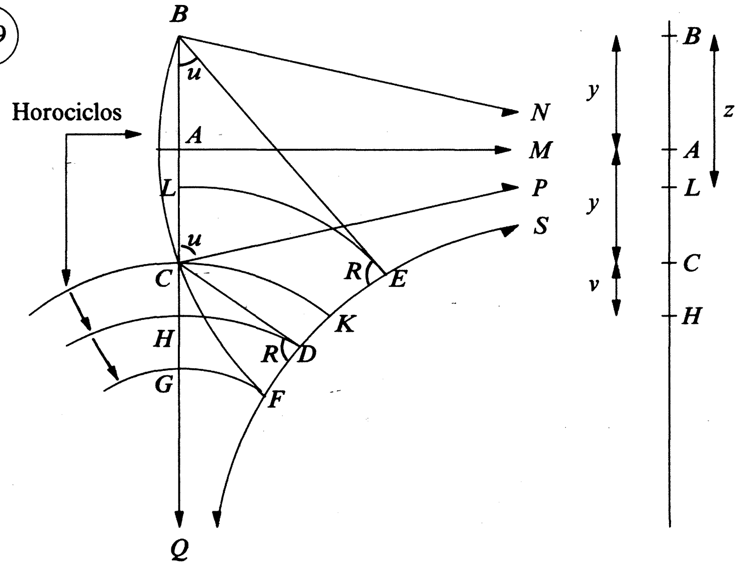
Bolyai complica innecesariamente, pues (*) no hace falta.

Bolyai deja como ejercicio el siguiente resultado análogo al anterior que usa en §31:



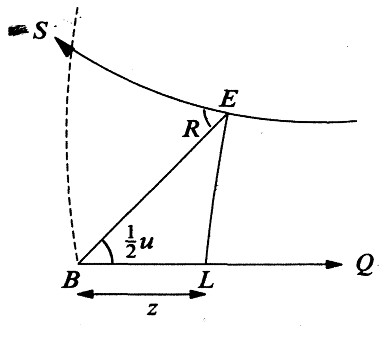
$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CG}} = \frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} v} = \frac{1}{\operatorname{sen} \Pi(\overline{BG})}$$

§29

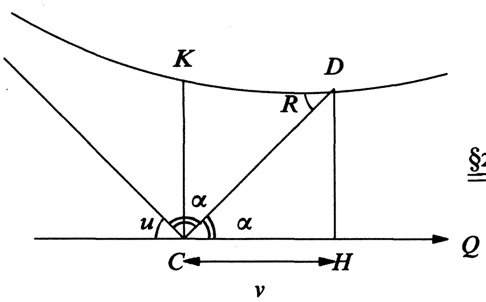


$$\overline{HG}=\overline{DF}=\overline{DK}=\overline{HC}\Rightarrow \overline{CG}=2\overline{CH}=2v$$

Análogamente $\overline{BG}=2\overline{CL}=2z$ luego $\overline{BC}=\overline{BG}-\overline{CG}\Rightarrow y=z-v\Rightarrow f(y)=\dfrac{f(z)}{f(v)}$



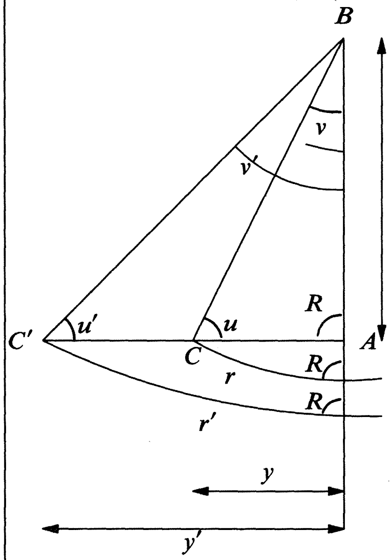
$$\overset{\S 28}{\Longrightarrow}\quad f(z)=\frac{\operatorname{sen}R}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}=\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}$$



$$\overset{\S 28}{\Longrightarrow}\quad f(v)=\frac{\operatorname{sen}R}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}R}{\operatorname{sen}\left(R-\frac{u}{2}\right)}=\frac{1}{\cos\frac{1}{2}u}$$

luego $\boxed{f(y)=\operatorname{cotg}\frac{1}{2}u}$

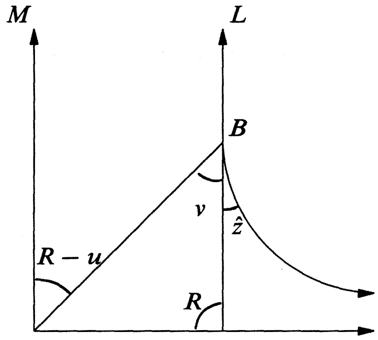
§30



Horociclos

$$\frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} v} = \frac{c}{y}$$

$$\frac{\operatorname{sen} u'}{\operatorname{sen} v'} = \frac{c}{y'}$$



$$\frac{\operatorname{sen} v}{\cos u} = \frac{\operatorname{sen} v}{\operatorname{sen}(R-u)} = \frac{1}{\operatorname{sen} \hat{z}} \leftarrow \text{§ 27}$$

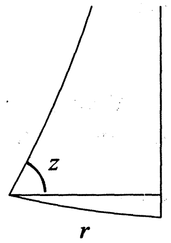
$$\frac{\operatorname{sen} v'}{\cos v'} = \frac{\operatorname{sen} v'}{\operatorname{sen}(R-u')} = \frac{1}{\operatorname{sen} \hat{z}}$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{r}{r'} = \frac{(\operatorname{sen} u')(\operatorname{sen} v)}{(\operatorname{sen} u)(\operatorname{sen} v')} = \frac{\operatorname{sen} u'}{\operatorname{sen} u} \cdot \frac{\cos u}{\cos u'} = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{\operatorname{cotg} u}{\operatorname{cotg} u'}$$

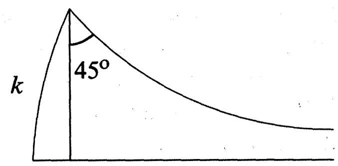
Si $c \longrightarrow \infty$, $u \longrightarrow z$, $u' \longrightarrow z'$ luego

$$\frac{r}{r'} = \frac{\operatorname{cotg} z}{\operatorname{cotg} z'} \quad \text{es decir} \quad \frac{r}{\operatorname{cotg} z}$$

es una constante k(*)



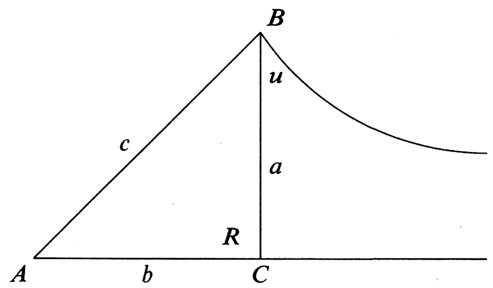
(*) Tomando $z = \dfrac{\pi}{4}$ es $r = k$. Así que "k es la mitad del arco de horociclo cuya semicuerda posee ángulo de paralelismo de 45º":



Ahora puede *Bolyai* en § 31 desarrollar la trigonometría. La ley de los senos del § 25 da, en virtud de § 30, lo siguiente

$$\operatorname{senh}\left(\frac{a}{k}\right) : \operatorname{senh}\left(\frac{b}{k}\right) : \operatorname{senh}\left(\frac{c}{k}\right) = \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C$$

En un triángulo rectángulo recto en C,



obtenemos

(I) $$\boxed{\operatorname{senh}\left(\frac{a}{k}\right) = \operatorname{senh}\left(\frac{c}{k}\right)\operatorname{sen} A}$$

El §27 da

$$\frac{\cos A}{\operatorname{sen} B} = \frac{1}{\operatorname{sen} u} = \cosh\left(\frac{a}{k}\right)$$

mediante §29. Es decir:

(II) $$\boxed{\cos A = \cosh\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{sen} B}$$

Mediante un argumento especial, en el cual utiliza la relación mencionada en las observaciones a §28, *Bolyai* obtiene el *teorema de Pitágoras*:

(III) $$\cosh\left(\frac{c}{k}\right) = \cosh\left(\frac{a}{k}\right)\cosh\left(\frac{b}{k}\right)$$

De (I), (II) y (III) se deduce toda la trigonometría hiperbólica plana.

§1. El Apéndice: las coordenadas.

Los §§32 y 33 del apéndice son en mi opinión de lo más interesante del trabajo de Bolyai, pues dan idea cabal del pensamiento del autor sobre el problema de las paralelas *al tiempo de publicar el Apéndice*. Comienza el §32 introduciendo un sistema de coordenadas en el plano hiperbólico que Bolyai llama rectangular. Dado un origen O sobre una recta orientada r, las coordenadas rectangulares (x, y) de un punto P son la distancia y de P a r (con signo) y la distancia x hasta O desde el pie de la perpendicular trazada desde P a r.

$$ds^2 = \cosh^2\left(\frac{y}{k}\right) dx^2 + dy^2$$

Procede después *Bolyai* a indicar cómo pueden aplicarse los métodos del análisis al cálculo de tangentes a curvas, longitudes, áreas y volúmenes, y obtiene muchos resultados relativos a la rectificación del horociclo, área y volumen de la esfera, etc... Pero al contrario que *Lobachevski* no da explícitamente el valor de ds^2 que en las coordenadas anteriores es

$$ds^2 = \cosh^2\left(\frac{y}{k}\right) dx^2 + dy^2$$

Nótese que la introducción de coordenadas es un primer paso para probar la consistencia de la teoría. Falta interpretar en esas coordenadas las palabras no definidas del sistema axiomático. Vemos que *Bolyai* se ha acercado inconscientemente a la solución, pero no lo suficiente. Fue *Beltrami*, equipado con las nuevas ideas de geometría diferencial quien supo resolver el problema de la consistencia brillantemente.

Es precisamente en esta sección §32 y en la siguiente donde *Bolyai* es más explícito sobre sus ideas relativas al problema de las paralelas. Es difícil saber cómo pensaba realmente *Boyai* sobre esto, pero aventuro una opinión que ha de tomarse con toda la circunspección necesaria y que está basada en las siguientes citas del Apéndice:

(Q1) Título del Apéndice:

"*Apendix* scientiam spatii *absolute veram* exhibens: *a veritate aut falsitate Axiomatis* XI *Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem*: adjeta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica", es decir:

"Apéndice que exhibe la ciencia *absolutamente verdadera* del espacio: independiente de la verdad o falsedad del Axioma XI de Euclides (*a priori* jamás decidible): al que se adjunta, en caso de falsedad, la cuadratura geométrica del cículo".

(Q2) Hacia el final de §32:

"Demonstrari potest, *omnis expressionis literam* i *continentis* (adeoque *hypothesi*, quod *detur* i, innixae) *limitem, crescente* i *in infinitum, exprimere quantitatem plane pro* Σ (adeoque pro hipothesi *nullius* i), *siquidem non eveniant aequationes identicae.*

Cave vero intelligas putari, *systema ipsum variari* posse (quod omnino *in se et per se determinatum est*) sed tantum *hypothesis* quod *succesive* fieri potest, donec non ad absurdum perducti fuerimus. *Posito* igitur, quod in *tali* expressione litera i pro casu, si S esset re ipsa, *illam* quantitatem unicam designet, cuius $I = e$ sit; si vero *revera* Σ fuerit, *limes dictus* loco expresssionis accipi *cogitetur*: manifesto *omnes* expressiones ex *hypothesi realitatis* ipsius *S* oriundae (hoc sensu) *absolute valent*, etsi *prorsus ignotum sit, nun* Σ *sit, ant non sit*", es decir:

"Puede demostrarse, que todas las expresiones que contienen la letra k (en la hipótesis de que k exista), al crecer k infinitamente, expresan en el límite cantidades planas de Σ (sin k, por hipótesis) a menos que ocurran identidades. Cuídate sin embargo de pensar que el sistema mismo pueda variar (ya que en sí mismo y por sí mismo está determinado) sino tan solo las hipótesis que sucesivamente pudieran hacerse, mientras no condujeran a contradicción. Supuesto pues, que en tales expresiones la letra k designa aquella única cantidad cuyo $K = e$, en el caso de ser S cierto en la realidad; mientras, que reemplaza el dicho límite a tales expresiones, si el realmente verdadero es Σ, sería manifiesto que todas las expresiones, en la hipótesis de la realidad de S, valdrían absolutamente (en este sentido), mientras que permanecería totalmente ignoto si Σ es o no es".

(Q3) Párrafo §33:

(I) "Num Σ aut S aliquod *reipsa* sit, indecisum manet"

(II) "Omnia ex hypothesi *falsitatis* Ax. XI deducta (semper *sensu* §32 intelligendo) *absolute* valent, adeoque *hoc sensu nulli hypothesi innituntur*. Habetur idcirco *trigonometria plana a priori* in qua *solum* systema *ipsum ignotum* adeoque solummodo *absolutae* magnitudes expressionum incognitae manent, per *unicum* vero casum notum, manifesto totum systema figeretur".

"Si *constaret*, Σ esse, nihil hoc respectu amplius incognitum esset; si vero *constaret non esse* Σ, ... ", es decir:

(I) "Permanece sin decidir si el sistema Σ, o algún S, es el *real*".

(II) "Todo lo deducido en la hipótesis de la *falsedad* del Axioma XI vale *absolutamente* (sobreentendiendo siempre el *sentido* de §32), luego *en este sentido no* precisan *de hipótesis ninguna*. Por tanto, hay *a priori una trigonometría plana* en la cual *sólo* permanece *ignoto* el sistema *mismo*; luego sólo las magnitudes *absolutas* de las expresiones permanecen desconocidas; mas si fuesen conocidas sólo para un *único* caso, todo el sistema –manifiestamente– quedaría fijado. Si constase ser Σ real, nada, a este respecto, quedaría sin saberse; mas si por el contrario, Σ no fuese real... "

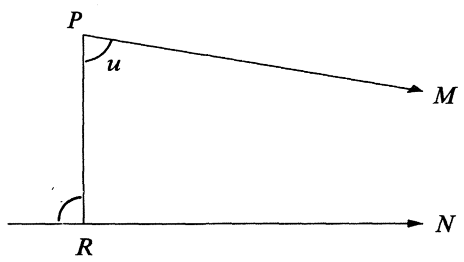
(Q4) §43 **(Frase final del Apéndice):**

"Superesset denique,... impossibilitatem, (absque suppositione aliqua) decidendi, num Σ, aut aliquod (et quodnam) S sit, demonstrare: quod tamen occasioni magis idoneae reservatur", es decir:

"Queda por probar la imposibilidad de decidir (sin usar ninguna suposición) cuál, entre Σ y los varios S, existe: lo cual sin embargo, se reservará para una ocasión más idónea."

Revelan estas citas un concepto de la geometría y del mundo real que creo poder resumir en las siguientes observaciones:

(I) *Bolyai*, como indica en el título del Apéndice, se impone a sí mismo la tarea de desarrollar la geometría "del espacio" [real] sin tomar partido por el Axioma XI o no –XI. Considerará simultáneamente todas las posibilidades para la paralela $\overrightarrow{PM}$ a $\overrightarrow{RN}$ en



incluido el caso euclídeo ($u = 90°$) y todos los demás posibles *a priori* ($u < 90°$). Así desarrollará "la ciencia *absolutamente verdadera*": sea el espacio como sea, caerá dentro de uno de los casos estudiados, "independientemente de la verdad o falsedad [en el mundo real] del Axioma XI de Euclides" (ver cita Q1).

Efectivamente, *Boyai* logra "una trigonometría plana" con validez absoluta (cita Q3).

(II) "Sólo queda por decidir si el sistema Σ o alguno de los sistemas S es el real" (cita Q4). Una vez averiguado esto (y calculado k), "todo el sistema quedaría fijado" (cita Q3; ver cita Q2) (*).

(III) La decisión entre cuál (Σ o algún S) es el real, no puede hacerse por razones intrínsecas del sistema ("sin usar ninguna otra suposición", en cita Q4; "a priori", en cita Q1), como explícitamente dice en Q1 y en Q4 (aunque postpone la demostración para otra ocasión). Esto es lo mismo que afirmar que ninguno de los dos sistemas S y Σ lleva a contradicción, o que ambos son consistentes simultáneamente. Por eso *Bolyai* (como *Lobachevski*), convencido de la consistencia de Σ y los S buscó en el mundo real cuál de ellos era el verdadero (la "reipsa" de Q3).

(IV) Abundando en el significado de "ciencia absolutamente verdadera del espacio" *Bolyai* se mete a otras consideraciones en las citas Q2 y Q3. En la cita Q2 dice que el sistema Σ es el límite de los sistemas S_k (desde ahora, el sistema S con constante k) cuando $k \to \infty$. Así podemos poner $\Sigma = S_\infty$. Entonces:

"Todo lo obtenido suponiendo el Axioma XI falso vale absolutamente" (cita Q3) porque $S_\infty = \Sigma$.

(*) Remacha en la cita Q2 que el "sistema mismo" no puede variar, por cuanto en sí mismo y por sí mismo está determinado. Con la expresión "sistema mismo" (*systema ipsum, reipsa, revera*) se refiere al sistema real, al plano ontológico. Lo único que puede cambiar es el sistema lógico: las "hipótesis que pueden hacerse" con el fin de describir el "sistema mismo" mientras no sean contradictorias.

Aventuro que es esta idea la que psicológicamente convence a *Boyai* de la consistencia de todos los sistemas, S y Σ, a la vez; a saber, la trabazón lógica que ve en ellos por razón de ser $S_\infty = \Sigma$. Como los sistemas forman un continúo, y como uno de ellos (exactamente) es *real* (¡y consistente!) todos resultarán consistentes.

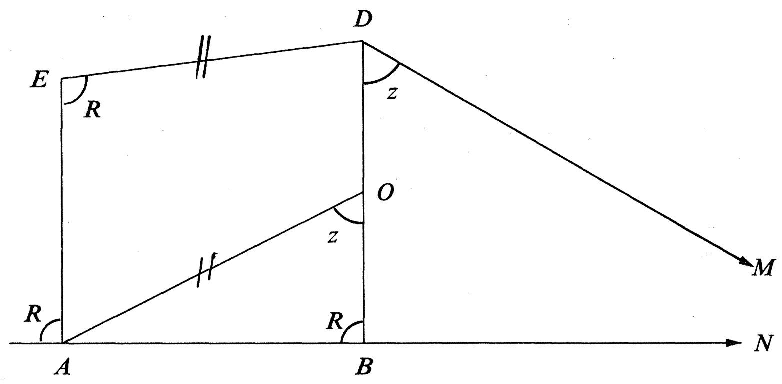
Resumiendo, Bolyai esta psicológicamente convencido de la consistencia de los sistemas S y del Σ (cita Q4 y Q1). Se plantea el problema de probarla (cita Q4), pero lo deja para el futuro (cita Q4).

En esto, *Bolyai*, como *Gauss* y *Lobachevski* se diferencian netamente de los anteriores cultivadores de la geometría no euclídea; a saber, en que estaban convencidos de su coherencia interna, mientras que los anteriores siempre buscaban una contradicción, para establecer una demostración del Axioma de las paralelas.

§6. El Apéndice: el final.

Las secciones §34 a §38 se dedican a varias *construcciones geométricas*, de las que destacamos las dos siguientes:

(i) *El ángulo de paralelismo z correspondiente a una distancia dada* $\overline{DB}$ *a* $\overrightarrow{BN}$ *(§34).*
Elige A; traza $AE \perp AN$;



traza $DE \perp AE$; traza $\overline{AO} = \overline{ED}$. Entonces:

$$\left(\overline{AB}\right) = \left(\overline{AO}\right) \operatorname{sen} A\hat{O}B$$

y por §27 es

$$\left(\overline{AB}\right) = \left(\overline{ED}\right) \operatorname{sen} z$$

luego $A\hat{O}B = z$;

(ii) *El problema inverso al anterior (*§35*)*

Las secciones §§39, 40, 41, 42, se dedican a probar que *la razón de las áreas de dos triángulos hiperbólicos es igual a la razón de sus defectos angulares.* La demostración dada difiere de la que *Gauss* envió a *Bolyai* en su carta de 1832 (ver §8). Pero es curioso que una demostración similar a la de *Gauss* ya era conocida por *Bolyai*, como demuestran sus papeles póstumos ([JB], p.173).

La sección §43 (última del *Apéndice*) se dedica a probar que si Δ es el área del triángulo y z su defecto angular es $\Delta = zk^2$.

Acaba el libro proporcionando, como promete en el título, la construcción con regla y compás de un cuadrado, es decir, de un polígono de cuatro lados y ángulos iguales, y un círculo de igual área πk^2. Esta construcción es propia de *Bolyai* y no aparece en la obra de *Lobachevski.*

*
* *

Parece apropiado traer al final de esta asombrosa memoria la carta que Juan Bolyai escribió a su padre inmediatamente después de su descubrimiento en 1823. Es una carta triunfal en la que Juan dice haber "creado de la nada un nuevo mundo". Es esta precisamente la sensación que le queda a uno tras la lectura del Apéndice. He aquí la carta:

Temesvár, 3 *de Noviembre de* 1823

Mi querido y buen padre:

Tengo tanto que escribir acerca de mi nueva creación, que de momento me es imposible entrar en detalles, así te escribo únicamente una cuartilla. Espero tu respuesta a mi carta de dos folios; y tal vez no te hubiera escrito antes de recibir tu respuesta si no hubiera deseado mandarte la carta que he escrito a la Baronesa, la cual te ruego se la hagas llegar (...).

Vamos ahora a otro asunto en tanto lo permita el papel. Planeo escribir, tan pronto lo haya puesto en orden, y cuando pueda publicarse, un trabajo sobre las paralelas. No está todavía acabado, pero he dado con un camino que promete con certeza alcanzar la meta, si es en general alcanzable. Todavía no ha sido alcanzada pero he descubierto cosas tan magníficas que yo mismo estoy estupefacto.

Sería una pérdida eterna si se perdieran. Cuando las veas, padre, tú mismo lo reconocerás. Ahora no puedo decir más; sólo esto: que de la nada he creado un mundo completamente nuevo. *Todo lo que te he enviado comparado con esto es castillo de naipes frente a un verdadero castillo.*

P.S. *He osado, padre mío, juzgar sobre estos trabajos de mi espíritu absolutamente y con convicción antes que tú; no temo de ti ninguna interpretación falsa (que ciertamente yo no merecería), lo que significa, que desde cierto punto de vista, te considero un segundo yo.*

§7. Gauss.

En [JB] F. Kárteszi dice que

> *"hasta ahora, no ha aparecido tratado alguno que examinara la actividad de* Gauss *en la elaboración de la geometría no euclídea, así como su renuencia a publicar sus propios logros o dar a conocer los de otros; tratado que tuviera el mismo rigor que el utilizado en la disección de la obra de* Bolyai *y* Lobachevski *hasta los más finos detalles".*

A continuación el mismo autor procede a describir la tarea de *Gauss* en esta materia "esbozando los hechos certificados por documentos".

El lector interesado puede hallar en [JB] cuáles son esos hechos. Por mi parte, me contentaré con traducir el texto de algunas cartas que dan idea de la actividad de *Gauss* en esta materia.

Parece que Gauss comenzó desde muy pronto a ocuparse del problema de las paralelas. El mismo dice que comenzó sus "meditaciones" a los quince años, en 1792. Al principio trató de demostrar el axioma de las paralelas. Es casi seguro que, como Saccheri y Lambert, comenzó obteniendo deducciones en la hipótesis de la negación del axioma de las paralelas. Al menos eso se trasluce de la siguiente temprana carta (17. XII. 1799) a Farkas Bolyai (ver [G], vol.8, pp.159–160):

> *"En cuanto a mí, mis trabajos están ya muy adelantados; pero el camino por el que he penetrado no conduce al fin que se persigue, y que tú afirmas haber alcanzado,* [la demostración del axioma de las paralelas] *sino que más bien conduce a poner en duda la existencia de la Geometría.*
>
> *He llegado, es verdad, a muchas cosas, que para la mayor parte de los hombres constituirían una demostración válida; pero que, en mi opinión, no prueban, por decirlo así,* nada*; por ejemplo: si se pudiese demostrar que, dada un área cualquiera, existe un triángulo rectilíneo de área mayor, entonces estaría en condiciones de demostrar con rigor perfecto toda la Geometría.*
>
> *Casi todos, es cierto, quisieron dar a esto el título de axioma; yo no; podría, en efecto, ocurrir que por lejanos que entre sí estuvieran los vértices de un triángulo en el espacio, su área fuese, sin embargo, inferior a un*

límite asignado. Poseo muchas afirmaciones como ésta pero no encuentro ninguna de ellas satisfactoria".

Como se ve, su exploración de la nueva geometría está avanzada. Además se empieza ya a tambalear en él su confianza en las afirmaciones de *Kant* sobre el espacio. En estas tempranas fechas *Gauss* está todavía bajo la influencia del pensamiento de *Kant* y piensa que la Geometría existe "puramente *a priori*" al igual que la aritmética, de modo que sus principios existen "*a priori*", son por tanto necesarios, y en consecuencia sólo es posible una única Geometría. La frase anterior: "poner en duda la existencia de la Geometría" significa que duda de que exista "*a priori*". Poco a poco se fue convenciendo de que la *necesidad de la Geometría euclídea era indemostrable* (el "*a priori* jamás decidible" de Bolyai, que vimos antes) *por la razón humana*, aunque deja la puerta abierta a alguna posibilidad demostrativa supranatural:

"Estoy cada vez más convencido de que la necesidad de nuestra geometría no puede ser probada, al menos no por la humana *razón, ni tampoco por razonamiento humano. Es posible que en otra vida alcancemos conclusiones sobre la naturaleza del espacio a la que en ésta no tenemos acceso. Mientras tanto no debemos poner a la geometría a la par de la aritmética –que existe puramente* a priori–, *sino de la mecánica, más bien, cuyos principios se toman del mundo material por abstracción."*

(Carta a H.W. Olbers de 28 de Abril de 1817; [G] vol 8, p. 177).

Cuando en 1832 escribe a Farkas Bolyai dando razón de la obra del hijo de éste, todas las dudas se han disipado y, lo que es peor, muestra un gran desprecio por los filósofos. Parece como si se resintiera de haber sido engañado por Kant:

*"Que es imposible "*a priori*" decidir entre Σ y S es la más clara evidencia del error que* Kant *ha cometido cuando afirmó que el espacio era simplemente la* forma *de nuestro modo de ver las cosas".*

Y en la carta a Taurinus de 1824 que citaremos luego se manifiesta claramente su irritación:

"Pero me parece que, a pesar de la verborrea, que ignora todo, de los filósofos, sabemos muy poco, o casi nada, de la naturaleza real del espacio, como para considerar un absolutamente imposible *lo que nos aparece como no natural".*

El 11 de Abril de 1816 en su carta a C.L. Gerling dice ([G], vol. 8, p. 169):

*"Parece paradójico que pudiera existir un segmento constante, dado, como si dijéramos, "*a priori*" pero yo no encuentro en ello ninguna contradicción. En efecto, sería deseable que la geometría Euclídea no fuese cierta, pues entonces tendríamos una medida universal* a priori*: Se podría emplear el lado de un triángulo equilátero de ángulo=* 59° 59′ 59″ 9999 *como unidad de longitud".*

Comparando esta carta con la de 1817 dirigida a Olbers, podemos poner entre 1816 y 1817 el momento en que *Gauss* se convence psicológicamente de que pueden existir otras geometrías, además de la euclídea, no contradictorias.

Otras cartas más de fechas posteriores a 1817 nos dan la medida de lo que Gauss conocía por entonces. Así, en diciembre de 1818 *Schweikart* dio a *Gerling* una nota para *Gauss*, y el 25 de Enero de 1819, Gerling escribe a Gauss lo siguiente:

"A propósito de la teoría de las paralelas debo decirte algo, y cumplir un encargo. El año pasado supe que mi colega Schweikart (profesor en jurisprudencia y ahora prorrector) había cultivado antes las matemáticas y que en particular escribió algo sobre las paralelas.

De modo que le pedí que me dejara su libro. Aun cuando me lo prometió, me dijo que ahora sí que se daba cuenta que su libro (1808) contenía errores (por ejemplo, que utilizó cuadriláteros con ángulos iguales como idea inicial), pero que no ha cesado de ocuparse en ello, y que ahora está casi convencido de que, sin algún dato, el postulado de Euclides no puede probarse; también, que no le resulta improbable que nuestra geometría sea sólo un capítulo de una geometría más general.

Le dije entonces que tú, hace ya algunos años, dijiste abiertamente que desde el tiempo de Euclides no hemos realizado ningún progreso en ese tema; sí, que tú a menudo me has comentado que tras haberte ocupado en ello de múltiples modos no has conseguido demostrar el absurdo de tal hipótesis. Entonces, cuando me envió el libro que pedí, añadió la nota que incluyo, y que poco después (fin de Diciembre) me dijo de palabra, que si procedía te enviara la nota con la petición de que le des tu opinión sobre sus ideas".

Nota de Schweikart (Marburg, Diciembre 1818)

"Existen dos geometrías, una geometría en sentido restringido: la euclídea, y una ciencia astral de la magnitud".

Los triángulos, en esta última, tienen la particularidad de que la suma de sus tres ángulos no es igual a dos ángulos rectos.

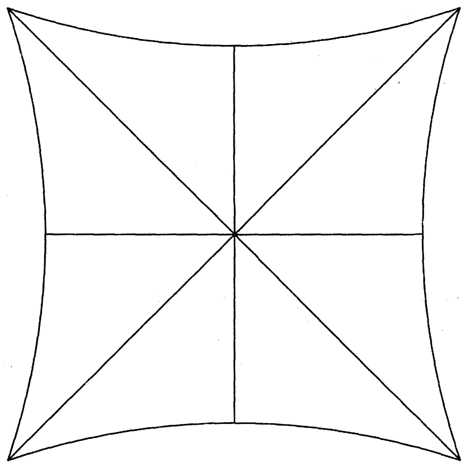
Sentado esto, se puede demostrar rigurosamente:

a) Que la suma de los tres ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos;

b) Que esta suma es tanto menor cuanto mayor es el área del triángulo;

c) Que la altura de un triángulo rectángulo isósceles, aun creciendo cuando crecen sus lados, sin embargo no puede superar a determinado segmento, que yo llamo constante.

El cuadrado, en consecuencia tiene la forma de la figura



Si esta constante fuese para nosotros, el semieje terrestre (...) sería infinitamente grande respecto a las dimensiones que se presentan en la vida cotidiana.

La geometría euclídea se verifica en la hipótesis de que la constante sea infinitamente grande. Sólo entonces es verdad que la suma de tres ángulos de todo triángulo es igual a dos rectos.

[G, vol. 8, pp. 180–181]

Tras recibir *Gauss* estos pliegos escribió a *Gerling* el 16 de Marzo de 1819 esto:

"La nota del profesor Schweikart *me ha producido gran satisfacción y le pido y le transmito mis mejores deseos. Casi todo lo que dice es copia de mi alma"*

[G. vol. 8, p. 181].

Por lo que *Gauss* escribió a F. Bolyai en 1799, y a Gerling en 1816, queda claro que lo que Schweikart le comunica, ya lo conocía. Como sello de que es así, *Gauss* acostumbra a añadir algún dato que lo demuestra. Por ejemplo, en la carta última del 16 de Marzo de 1819 a Gerling, Gauss dice que ha desarrollado la *Geometría Astral* hasta el punto de poder resolver cualquier problema, dada la *constante* a que se refiere Schweikart. Y como confirmación de ello adjunta el límite superior del área de un triángulo:

$$\frac{\pi C^2}{\left(\log(1+\sqrt{2})\right)^2}$$

donde C es la constante de Schweikart, es decir, la constante tal que su ángulo de paralelismo es 45°.

Se puede datar entre 1812 y 1816 la época en que *Schweikart* hizo sus descubrimientos, según la carta del 26 de Febrero de 1844 de Gerling a Gauss.([G], vol. 8, p. 238) en que habla del trabajo de *Lobachevski*:

> *"Las estepas rusas parecen, por tanto, ser tierra apropiada para estas especulaciones, pues Schweikart (ahora en Könisberg) inventó su geometría Astral mientras estaba en Charkow".*

El 8 de Noviembre de 1824, 8 años antes de la aparición en prensa de la obra de Juan *Bolyai*, y 5 años antes de la publicación del primer opúsculo (en ruso) de Lobachevski, escribe *Gauss* a F. A. *Taurinus*, sobrino del mencionado *Schweikart* lo siguiente:

> *"En cuanto a tu intento no tengo nada (o casi nada) que decir salvo que es incompleto. Cierto es que tu demostración de la prueba de que la suma de los tres ángulos de un triángulo plano no puede superar 180° carece en cierta medida de rigor geométrico. Pero esto en sí mismo tiene fácil remedio y no existe duda de que tal imposibilidad puede probarse con todo rigor. Pero la situación es muy diferente en la parte segunda: que la suma de ángulos no pueda ser menor que 180°; este es el punto crítico, el escollo en que ocurren todos los naufragios. Supongo que no te has ocupado de este problema por mucho tiempo. Yo he reflexionado sobre él cerca de 30 años, y no creo que haya nadie que haya pensado sobre esta segunda parte más que yo, aunque nunca he publicado nada.*
>
> *La hipótesis de que la suma de los tres ángulos es menos que 180°, conduce a una curiosa geometría, muy diferente de la nuestra* [la euclídea], *pero completamente consistente**, *la cual he desarrollado a mi entera satisfacción, de manera que puedo resolver cualquier problema de ella, a excepción de la determinación de una constante, que no puede ser designada* a priori*: Cuanto más grande se tome la constante, más se aproxima esta geometría a la Euclídea; y coincide con ella cuando la constante es*

* Poco después aclara que con esto quiere indicar que ha sido incapaz de hallar contradicción ninguna en los resultados obtenidos, no que haya probado la consistencia (relativa, diríamos hoy) de la geometría no euclídea.

infinitamente grande. Los teoremas de esta geometría parecen paradójicos y, al no iniciado, absurdos; pero una pausada y costante reflexión revela que no contienen nada imposible en absoluto. Por ejemplo, los tres ángulos de un triángulo pueden llegar a ser tan pequeños como se desee, con solo alargar los lados suficientemente; sin embargo, el área del triángulo nunca puede pasar de un límite definido, no importa lo que se alarguen los lados, ni tampoco alcanzarlo.

Todos mis esfuerzos para descubrir una contradicción, una inconsistencia, en esta geometría no euclídea han sido vanos, y la única cosa en la que se opone a nuestras concepciones es que, si fuese cierta, existiría en el espacio una magnitud lineal, determinada por ella misma (pero desconocida para nosotros). Pero me parece que, a pesar de la sabiduría verbal, que nada conoce, de los metafísicos, sabemos muy poco, o casi nada acerca de la naturaleza real del espacio, como para considerar un absolutamente imposible *lo que nos parece como no natural. Si esta geometría no euclídea fuese cierta y fuera posible comparar tal constante con magnitudes tales como las que encontramos en nuestras mediciones de la tierra y de los cielos, podría ser determinada* a posteriori. *Consecuentemente, bromeando he expresado algunas veces el deseo de que la geometría Euclídea no fuese cierta, pues entonces tendríamos* a priori *una unidad de medida absoluta.*

No temo que un hombre que ha demostrado poseer una mente matemática reflexiva interpretará mal lo que acabo de decir, pero en todo caso, considera esto como comunicación privada de la que no se ha de hacer uso público, ni otro ninguno que pudiera llevar a cualquier tipo de publicidad. Tal vez yo mismo, si tengo más tiempo que el que ahora poseo, publique mis investigaciones".

([G], pp. 186–188)

Empezó a escribir Gauss un poco antes de Mayo de 1831, pues el 17 de Mayo de 1831 escribe a Schumaker:

"Hace algunas semanas he comenzado a escribir algunos resultados de mis meditaciones sobre este asunto, que se remontan en parte a cuarenta años, y de los cuales nada había redactado, lo que me ha obligado tres o cuatro veces a empezar de nuevo toda la labor en mi cabeza. No quisiera, sin embargo, que todo esto pereciera conmigo".

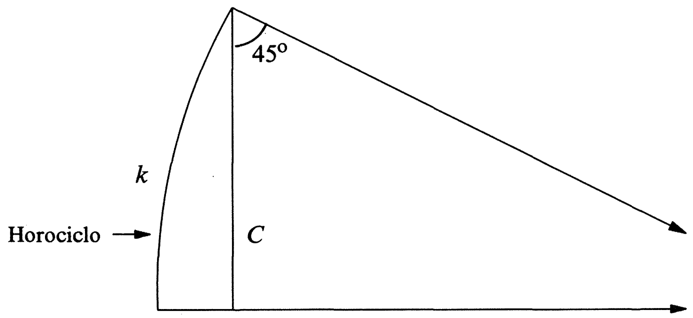
([G] pp. 212–213)

Y de hecho comenzó a escribir lo referente a las paralelas y horociclos, pero su redacción concluyó cuando se enteró de la aparición del Apéndice.

En la carta a (cfr. [G] pp. 215–218) Schumaker del 12 de Julio de 1831 determina la longitud de la circunferencia de radio r bajo la forma

$$2\pi k \operatorname{senh}\left(\frac{r}{k}\right)$$

donde k es una constante distinta de la C de Schweikart:

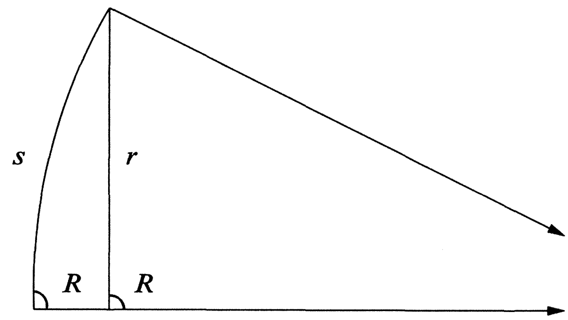


Gauss conoce la relación entre C y k como lo demuestra su carta a Gerling de 1819; esta relación es:

$$k = \frac{C}{\log(1+\sqrt{2})}$$

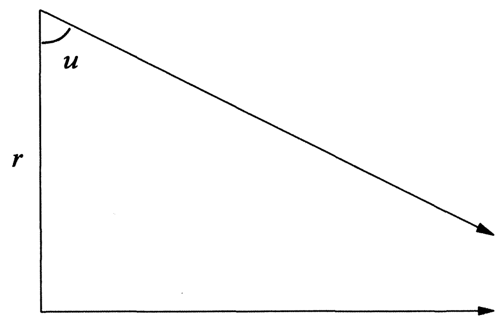
No cabe duda pues de que conoce las relaciones:

(i)



$$s = k \operatorname{senh}\left(\frac{r}{k}\right)$$

(ii)



$$e^{\frac{r}{k}} = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}u$$

De la primera, como *Bolyai*, deduce que la longitud de la circunferencia de radio r es

$$2\pi r = 2\pi k \operatorname{senh}\left(\frac{r}{k}\right)$$

De la segunda, haciendo $u = 45^{\circ}$ tiene $r = C$, luego:

$$e^{\frac{C}{k}} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$$

Podemos pues sospechar que en 1819 Gauss había desarrollado la geometría hiperbólica siguiendo el método que después siguió *Bolyai*. De hecho Gauss lo dice en la carta que pronto veremos. En contraste, Gauss afirma que aunque lo obtenido por Lobachevski no es nada nuevo para él, sí lo es el camino seguido, que no coincide con el de Bolyai, como también veremos.

Ya hemos dicho que Gauss sacó de la biblioteca de Göttingen la obra de *Lambert* en dos ocasiones 1795 y 1797, por eso no es extraño que pudiera haber desarrollado el trabajo de Lambert (hasta el punto que luego alcanzaron *Bolyai* y *Lobachevski*) en el período 1795–1819. Que *Gauss* estaba al corriente de la obra de Lambert, se saca también de la siguiente carta que le dirige *Bessel* el 10 de Febrero de 1829 ([G], vol. 8, p. 201):

> *"A través de lo que Lambert dijo, y Schweikart reveló oralmente, es para mí claro que nuestra geometría es incompleta, y que debería recibir una corrección, que es hipotética y que si resultara que la suma de los ángulos de un triángulo fuera de 180°, se anularía".*

§8. Gauss y Bolyai.

Vemos pues que *Gauss* estaba en posesión de los hechos más importantes de la geometría hiperbólica, aunque manifestaba no desear ninguna publicidad al respecto.

Como ya hemos dicho más arriba, el padre de Juan *Bolyai*, amigo de Gauss se apresuró a enviar a éste una copia del Apéndice. No cabe duda de que Gauss la leyó con rapidez y cuidado, contestando el 6 de Marzo de 1832 del siguiente modo:

> *"Algo ahora acerca del trabajo de tu hijo. Si empiezo diciendo que* no debo alabarte, *seguramente te quedarás perplejo por un momento; pero no puedo hacer otra cosa: alabarte sería alabarme, porque todo el contenido del trabajo, el camino seguido por tu hijo, y los resultados por él obtenidos coinciden casi desde el principio al fin con mis meditaciones en las que he ocupado parte de 30 a 35 años. Esto me ha dejado completamente estupefacto, en efecto".*

En cuanto a mi trabajo personal, del cual hasta aquí he confiado bien poco al papel, era mi intención no dejar que se publicase nada, durante mi vida. En efecto, la mayor parte de los hombres no tienen ideas claras de lo que se habla, y yo he encontrado muy pocas personas que prestaran un especial interés a lo que les comuniqué sobre tal asunto. Para poder tener este interés se necesita ante todo haber sentido muy vivamente lo que esencialmente falta, y sobre esta materia casi todos están en una perfecta oscuridad. Al contrario, era mi idea escribir, con el tiempo, todo esto para que al menos no pereciese conmigo. Y así es para mí una agradable sorpresa ver que esta fatiga puede serme evitada ahora, y estoy sumamente contento de que sea precisamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de un modo tan notable.

La carta trae en este punto otra demostración –hoy en día famosa– de que el área de un triángulo es proporcional a su defecto. Además Gauss sugiere a Juan *Bolyai* que trate de resolver el problema de hallar la fórmula del volumen de un tetraedro.

La carta prosigue así (doy el texto en alemán, porque las traducciones que conozco no son exactas, y creo que es un texto de gran interés):

> *"Um die Geometrie von Anfange an ordentlich zu behandeln, ist es unerlässlich, die Möglichkeit eines Planums zu beweisen".*
>
> (Para tratar la geometría desde el principio siguiendo un orden, es indispensable demostrar la posibilidad de un plano),

y continúa así:

> *"La definición ordinaria contiene demasiado, y ya implícitamente incluye subrepticiamente un teorema. Se tiene uno que maravillar, de que todos los autores desde* Euclides *hasta nuestros tiempos más recientes se conduzcan en su trabajo sobre este asunto, de modo tan negligente: sólo que esta dificultad sin embargo, es de naturaleza muy diferente de la de decidir entre Σ y S y no muy difícil de remover. Tal vez precisamente tu libro me satisfaga con respecto a esto.*
>
> *Que es imposible decidir* a priori *entre Σ y S, es la más clara evidencia del error que* Kant *ha cometido, etc..."*

([G] pp. 220–224)

La frase final de esta cita está en directa relación con la cita Q4 mencionada en §5.

También *Gauss* parece estar convencido, como *Bolyai*, de que "es imposible decidir *a priori* entre Σ y S", lo que entraña que los restantes postulados (todos menos el 5°) no implican ni el 5° postulado ni su negación. De lo contrario uno de los dos, Σ o S, o ninguno, sería necesario *a priori*.

Sentado esto, tratemos de entender qué quiere decir Gauss en el críptico párrafo penúltimo de la cita anterior. He aquí su contenido:

(1) Hay que demostrar la posibilidad de *un* plano, (no *del* plano como traducen todos).

(2) La definición ordinaria del plano está hecha con poco cuidado.

(3) La dificultad que suscita (2) es distinta del problema de "decidir entre Σ y S".

Creo que (1) y (2) se refieren* a la necesidad de una axiomática depurada, como después fue lograda por varios matemáticos. *Gauss* confía en que el libro de Farkas *Bolyai* (el *Tentamen*) sea ya suficientemente riguroso sobre esto, que por lo demás "no es difícil de resolver".

El problema de "decidir entre Σ y S" debe de referirse al problema de *Bolyai* (Q4): "Demostrar la imposibilidad de decidir *a priori* entre Σ y S". Esto es equivalente al problema de la consistencia de la geometría hiperbólica. ¿Cómo se planteó *Gauss* este problema? ¿Qué métodos siguió para atacarlo? Pues si bien lo miramos, *Gauss* tuvo que poner toda su atención en el problema de la consistencia. Una vez psicológicamente convencido de que la nueva geometría no llevaba a contradicción, tuvo que pensar en demostrarlo. Más aún, la falta de una demostración de ello sería razón más que suficiente para justificar su negativa a publicar nada sobre el tema. Sin demostrar la posibilidad de la geometría hiperbólica, ¿cómo podría defenderse del clamor de los Beocios?

Es precisamente aquí en donde radica la diferencia entre *Gauss* y *Bolyai–Lobachevski.*

A estos les basta estar psicológicamente convencidos de la consistencia para publicar sus resultados. No así *Gauss*, aparentemente el único que "ha sentido *muy vivamente* lo que esencialmente falta", como dice en la anterior carta.

Por lo demás, es en extremo misterioso encontrar entre las notas de *Gauss* sin fecha (p. 104 de [G], vol. 8), un dibujo de lo que sería el modelo de *Poincaré* del plano hiperbólico. No puede uno menos de pensar que tal vez *Gauss* estuvo *en efecto* muy cerca de demostrar la posibilidad de la geometría hiperbólica, y con ello acabar cerrando el problema de las paralelas. Sólo entonces, podría Gauss plantearse la publicación de sus resultados: *"Pauca sed matura"*.

Pero todas estas elucubraciones anteriores pueden ser completamente banales (y es lo más posible), y basadas en una falta de perspectiva histórica por mi parte,

* Ver también [G], pp. 193–196 y las ocho últimas líneas de la carta de Gauss a Besel en [G] p. 200.

siendo un "amateur". El lector más versado en estas lides sabrá pasar la audacia de mi ignorancia con una sonrisa.

Sea lo anterior cierto o no; sí es que Juan *Bolyai* recibió la carta con amargura y reaccionó mal. Podemos entenderlo muy bien, una vez que hemos estudiado antes el esfuerzo maravilloso del Apéndice. En [JB] pueden encontrarse datos muy abundantes de la vida posterior de Juan *Bolyai.* No publicó ya nada más, pero siguió trabajando y dejó muchos resultados escritos en húngaro. Lo más interesante tal vez, son sus estudios sobre la consistencia y su examen crítico (junto con su padre) de la obra de *Lobachevski*, que mencionaremos más tarde.

§9. Bolyai y el problema de la consistencia.

Como ya hemos visto, *Bolyai* claramente plantea en la última frase del Apéndice el "problema de demostrar la imposibilidad de decidir *a priori* entre Σ y S"; es decir, demostrar que su sistema geométrico está libre de *contradicciones.*

Inmediatamente después de la publicación del Apéndice, Bolyai comenzó a investigar este problema (ver [JB, pp. 228–230]) alguno de cuyos detalles pueden verse en [JB, p. 229]. En el curso de sus cálculos cometió un error que le llevó a pensar en la inconsistencia de S (y en consecuencia en la demostración indirecta del 5° postulado). Corregido el error, prosiguió sus cálculos, interrumpidos finalmente por la extraordinaria complicación de los mismos.

Es pues un timbre de honor más, para este gran matemático, el haber percibido claramente el "quid" de la cuestión y podemos decir que Juan *Bolyai* se encuentra entre los genios matemáticos más notables de la historia.

§10. Otras investigaciones de Gauss relacionadas con la geometría hiperbólica.

Ya hemos visto que *Gauss* conocía la geometría hiperbólica, prácticamente en la forma del Apéndice de *Bolyai*, y cómo poseía alguna demostración alternativa a esos resultados.

Entre los papeles de Gauss ([G] pp. 255–257) hay una nota escrita entre 1840 y 1846 (cfr. [F] pp. 28–29) en la que da solución concisa al siguiente interesante problema: "si las reglas de la geometría euclídea valen dentro de un círculo infinitesimal, ¿cuáles son las relaciones métricas globales?".

Gauss supone, sin darse cuenta, "el axioma de libre movilidad", o como diríamos hoy en día, que el grupo de isometrías ha de actuar transitivamente en el espacio tangente (todo vector tangente puede superponerse con otro de igual longitud mediante un movimiento). Esto supuesto, *Gauss* prueba que las solas posibilidades son la geometría euclídea, la hiperbólica y la esférica (o elíptica en el plano proyectivo): un resultado notable porque contiene en germen el concepto de variedad riemanniana, y que fue posteriormente redescubierto por otros autores.

§11. Lobachevski.

Nicolás Ivanovich Lobachevski nació el 20 de Noviembre de 1793 (1 de Diciembre en nuestro calendario) en la ciudad de Nizhni–Nóvgorod, hijo del registrador de la oficina de agrimensura Iván Maksímovich Lobachevski y de su mujer Praskovia Aleksándrovna. Es probable que el padre falleciera en torno a 1802. La madre, enérgica y sensata al decir de Kagan [K], decidió establecerse en Kazán para asegurar una buena educación a sus hijos. Lejos estaría de pensar que su hijo Nicolás dejaría una profunda huella en Kazán y llegaría a ser su ciudadano más brillante.

Nicolás vivió toda su vida en Kazán, dedicado completamente a la Universidad, de reciente fundación, primero como estudiante, luego como profesor y finalmente como Rector.

Hay preciosas noticias del ambiente universitario de Kazán en Kagan [K], libro partidista y repleto de prejuicios pero que contiene datos valiosísimos; la tradución española es además deplorable.

Nicolás era un alumno independiente, con gran personalidad, muy dotado para el latín y las matemáticas. Ingresó en 1807 en la Universidad y era ya capaz de leer memorias científicas en latín, alemán y francés aun cuando todavía no había cumplido los 15 años.

En 1808 vino a la Universidad, contratado por su Rector, el alemán M. F. Bartels, amigo de Gauss desde que coincidieron en la escuela hasta la muerte. Bartels era un matemático no creador pero un excelente y dedicado profesor. A finales de 1808 llegó otro matemático alemán K. F. Renner, educado en Gotinga, quien como Bartels influyó mucho en el joven Lobachevski, que aprendió de él la mecánica. De Bartels, aprendió Lobachevski, el análisis y la geometría analítica. En 1810 llegó a Kazán Francisco Javier Bronner, sucesivamente novicio benedictino, miembro de una logia Masónica y después de una Sociedad de Iluminados*. Tras sufrir persecución en Brunswick llegó a Kazán, amparado por Bartels, donde enseñó física. Lobachevski se benefició de sus enseñanzas, sufriendo además de la "gran influencia moral" que aquél tenía sobre estudiantes y profesores (ver [K]).

La astronomía la aprendió Lobachevski del Profesor Littrow, de renombre europeo, con quien logró notables progresos.

*Según Kagan, estas actividades produjeron en Bronner "aversión a la vida monástica" (?)

Lobachevski cursó cuatro años y después él mismo fue nombrado profesor. Su interés por la geometría comienza con su deseo de fundamentarla de un modo riguroso y personal. Parece que influyó en ello la necesidad de escribir un manual de Geometría para sus alumnos (la "Geometría"). Este manual refleja la intensa independencia y personalidad de su autor, y en él aparece la teoría de las paralelas tratadas de un modo que preludia ya su posterior ruptura con *Euclides* (ver [K]). Según Kagan [K, p. 113] la influencia en *Lobachevski* de la escuela de *Cauchy* y *Gauss* es la que impulsa en él "ese modo de pensar, esa finura, esa profundidad de espíritu, esa inclinación a poner todo en claro sin tomar en consideración las tradiciones", y sigue: "todo eso, (...) *Lobachevski* lo había heredado, efectivamente, de *Gauss* por intermedio de *Bartels*".

Pero está bien establecido que *Lobachevski* no se inspiró en *Gauss* para el desarrollo de la geometría no euclídea. Primero hacia 1815, comenzó tratando de demostrar el 5° postulado y dio una falsa demostración del mismo, pero "por entonces no tenía una opinión bien definida al respecto" [K, p. 139]. Entre 1823, fecha en que pensó publicar su "Geometría" a 1826 parece que se dio el proceso de maduración que condujo a *Lobachevski* al descubrimiento de la geometría hiperbólica. En efecto, en 1826, Lobachevski presentó a la facultad de física y matemáticas el trabajo titulado (en francés): "Exposición sucinta de los principios de la Geometría con una demostración rigurosa del teorema de la paralelas", que ni fue publicado, ni nunca ha sido encontrado.

Pero en 1829, Lobachevski publicó en el "Mensajero de Kazán" la memoria (en ruso) "Acerca de los principios de la Geometría", que según Lobachevski contiene un tercio de la memoria anteriormente citada y perdida. En este trabajo aparece una exposición de la nueva geometría (hiperbólica) hasta la trigonometría inclusive. Pero no deja de llamar la atención que la apostilla "con una demostración rigurosa del teorema de las paralelas" no aparezca en el título de la segunda memoria. ¿Contenía la primera memoria una demostración falsa del 5° postulado?. Sí, como todo parece indicarlo, esto es así, hay que retrasar al período 1826–1829 el convencimiento por parte de Lobachevski de que la nueva geometría estaba libre de contradicciones.

A este respecto nótese que "Acerca de los principios" contiene aquella parte de "Exposición sucinta" que luego compondrá la totalidad de la publicación de Lobachevski titulada "Investigaciones geométricas de la teoría de las paralelas" (Berlín, 1840, en alemán). Por tanto "Acerca de los principios" añade a la parte no expurgada de "Exposición sucinta" justamente las fórmulas de cálculo integral y las coordenadas en las que Lobachevski veía una confirmación de la consistencia de su nueva geometría.

Nos proponemos ahora exponer la obra de Lobachevski.

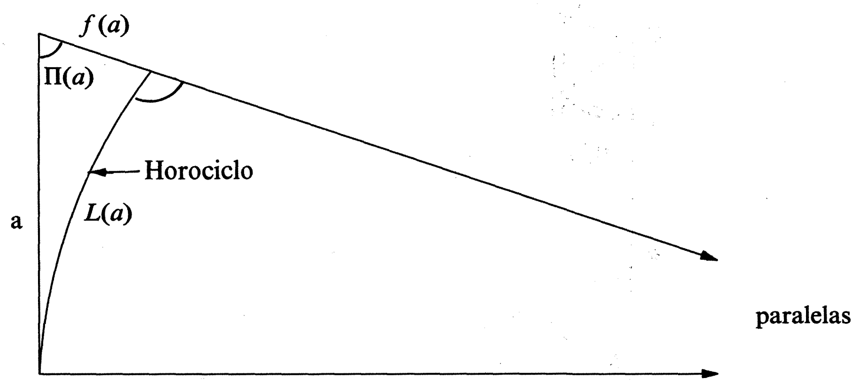
§12. La exposición sucinta.

La parte no expurgada de la exposición sucinta constituye “Investigaciones geométricas. . . ” y, convenientemente mejorada, forma la primera parte de la “Pangeometría”, obra póstuma, publicada simultáneamente en ruso y francés en 1855. Seguiré aquí la “Pangeometría” con apropiadas referencias a “Investigaciones geométricas. . . ” cuando sea necesario.

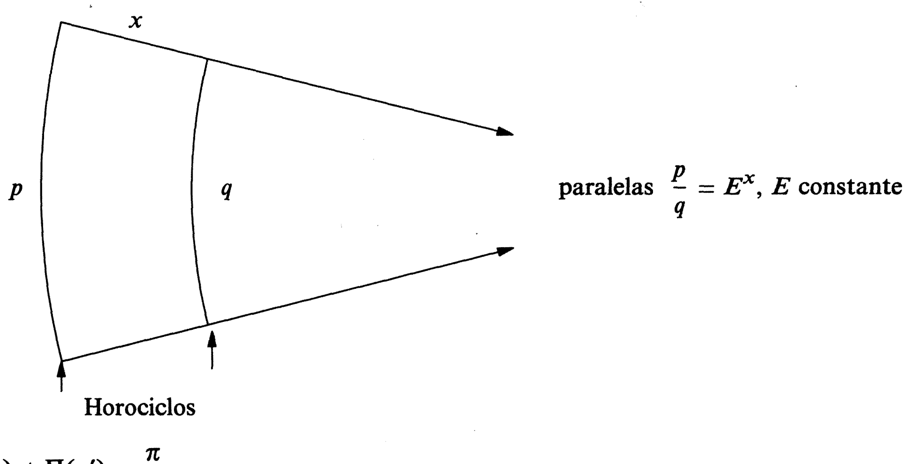
El texto que poseo de la “Pangeometría” es una traducción italiana de 1874. Tras desarrollar todo lo que hemos indicado en el §3, pasa Lobachevski a la *trigonometría.* Usa la siguiente notación:

(i) $\Pi(a)$ = ángulo de paralelismo.

(ii)



(iii)



(ii) $\Pi(a) + \Pi(a') = \dfrac{\pi}{2}$

(iii) Se define $\Pi(-a)$ así

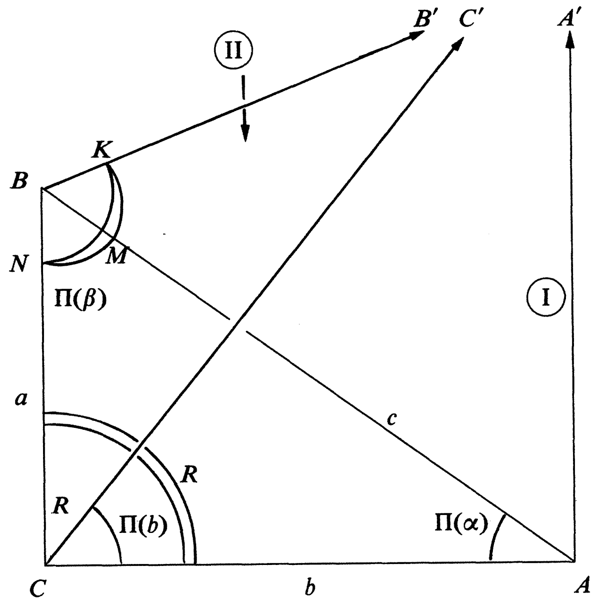
$$\Pi(a) + \Pi(-a) = \pi$$

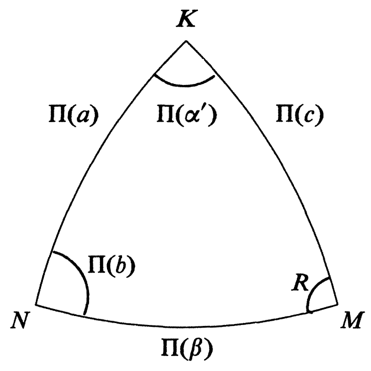
Ahora prueba los siguientes teoremas:

1. Teorema de los triángulos rectángulos conjugados.

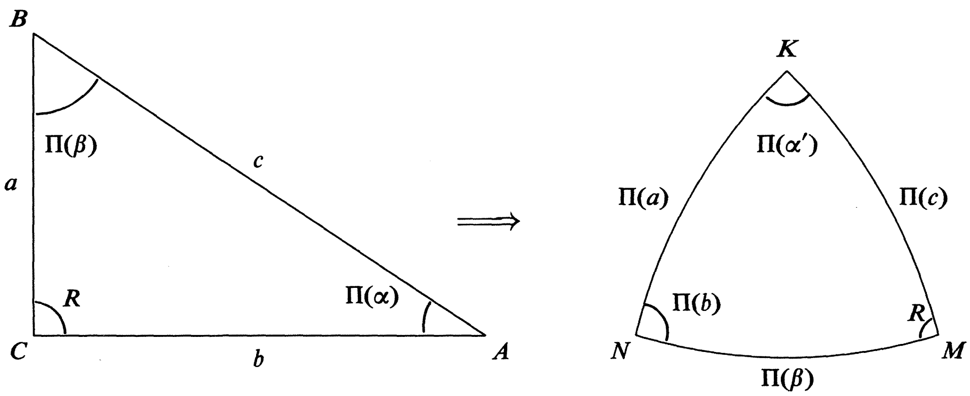
$$\overline{AA'} \perp \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \text{haz } \overline{AA'} \perp \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \mathrm{I} \perp \overset{\triangle}{ABC},\ \mathrm{II} \perp \overset{\triangle}{ABC}$$

$$\overline{BC} \perp (\overline{AC} = \mathrm{I} \cap \overset{\triangle}{ABC}) \Rightarrow \overline{BC} \perp \mathrm{I} \Rightarrow \text{haz } \overline{BC} \perp \mathrm{I} \Rightarrow \overset{\triangle}{BCC'} \perp \mathrm{I}.$$



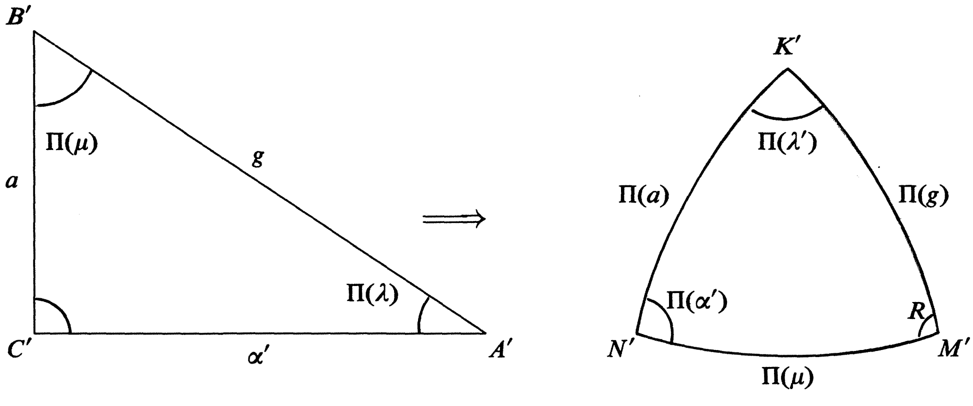


Como la suma de los tres ángulos diédricos convergentes en A' es π y el ángulo diédrico en $\overline{CC'}$ es $\pi/2$ es $\Pi(\alpha')$ el ángulo diédrico en $\overline{BB'}$. Luego *la existencia del triángulo rectilíneo* $\overset{\triangle}{ABC}$ *implica la existencia del triángulo esférico* $\overset{\triangle}{MNK}$:



hiperbólico

Sea ahora el triángulo rectilíneo y su esférico asociado:

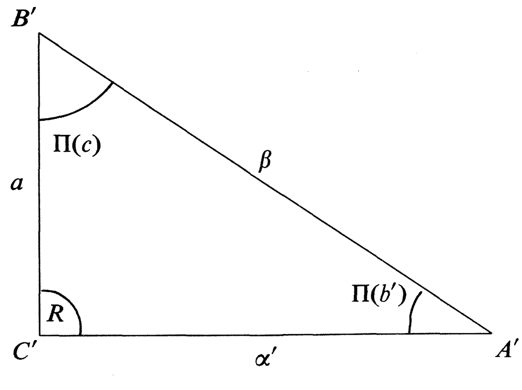


Como

$$\overset{\triangle}{KMN} = \overset{\triangle}{K'M'N'} \Rightarrow \Pi(\lambda') = \Pi(b),$$

$$\Pi(g) = \Pi(\beta),\ \Pi(\mu) = \Pi(c) \Rightarrow \lambda = b',\ g = \beta,\ \mu = c$$

luego la *existencia del triángulo* $\overset{\triangle}{ABC}$ *implica la existencia del* $\overset{\triangle}{A'B'C'}$:

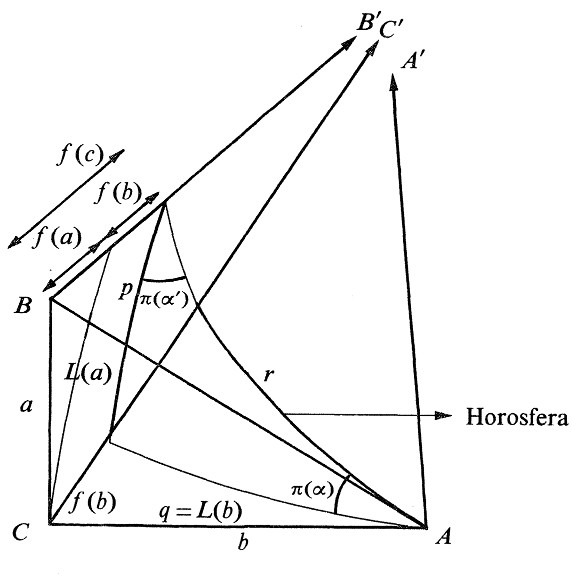


Esquemáticamente:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b & c \\ \Pi(\alpha) & \Pi(\beta) & \pi/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & \alpha' & \beta \\ \Pi(b') & \Pi(c) & \pi/2 \end{pmatrix}}$$

Este es un notabilísimo resultado. No conozco una construcción geométrica sencilla del triángulo conjugado.

2. Teorema de las trigonometrías esférica e hiperbólica.



$$\boxed{\begin{array}{l} f(a) + f(b) = f(c) \\ p = r \operatorname{sen} \Pi(\alpha), \quad q = r \cos \Pi(\alpha) \\ \dfrac{L(a)}{p} = E^{f(b)} \end{array}} \Rightarrow$$

$$L(a) = r \operatorname{sen} \Pi(\alpha)\, E^{f(b)}$$

Y también (simetría):

$$\text{También}\quad \left.\begin{aligned} L(b) &= r \operatorname{sen} \Pi(\beta)\, E^{f(a)} \\ q = L(b) &= r \cos \Pi(\alpha) \end{aligned}\right\}$$

Luego

$$\cos \Pi(\alpha) = \operatorname{sen} \Pi(\beta)\, E^{f(a)}$$

Usando el teorema anterior

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \Pi(\alpha) & \Pi(\beta) & \pi/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & \alpha' & \beta \\ \Pi(b') & \Pi(c) & \pi/2 \end{pmatrix}$$

será

$$\cos \Pi(b') = \operatorname{sen} \Pi(c)\, E^{f(a)}$$

Como $\Pi(b) + \Pi(b') = \dfrac{\pi}{2}$ será

$$\operatorname{sen} \Pi(b) = \operatorname{sen} \Pi(c)\, E^{f(a)}$$

Por simetría será

$$\operatorname{sen} \Pi(a) = \operatorname{sen} \Pi(c)\, E^{f(b)}$$

que multiplicadas por $E^{f(b)}$, $E^{f(a)}$ respectivamente, dan, teniendo en cuenta $f(a) + f(b) = f(c)$

$$\operatorname{sen} \Pi(b)\, E^{f(b)} = \operatorname{sen} \Pi(c)\, E^{f(c)} = \operatorname{sen} \Pi(a)\, E^{f(a)}$$

Haciendo tender a cero el lado a, valdrá para todo segmento c

$$\boxed{E^{f(c)} = \frac{1}{\operatorname{sen} \Pi(c)}}$$

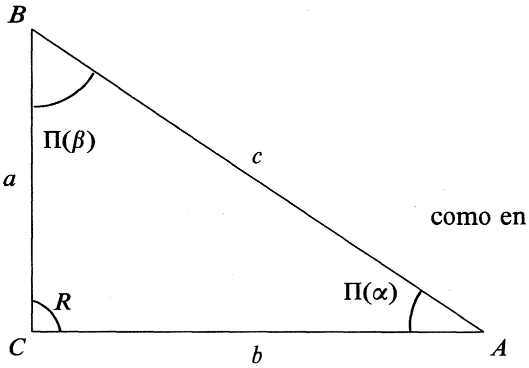
Así que

$$\cos \Pi(\alpha) = \operatorname{sen} \Pi(\beta)\, E^{f(a)} = \frac{\operatorname{sen} \Pi(\beta)}{\operatorname{sen} \Pi(a)}$$

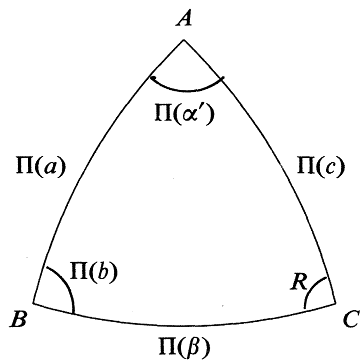
Y se tienen las siguientes fórmulas derivadas de esta:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \operatorname{sen} \Pi(b) \operatorname{sen} \Pi(a) = \operatorname{sen} \Pi(c) \quad (1) \\
\cos \Pi(\alpha) \operatorname{sen} \Pi(a) = \operatorname{sen} \Pi(\beta) \arrow[urr, "\substack{\alpha,\, a,\, \beta \\ \downarrow \\ b',\, a,\, c}"] \arrow[drr] & & \\
 & & \cos \Pi(\beta) \operatorname{sen} \Pi(b) = \operatorname{sen} \Pi(\alpha) \arrow[d, "{b,\, \alpha,\, \beta \,\to\, \alpha',\, b',\, c}"] \\
(3)\ \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta) = \cos \Pi(a) & & \cos \Pi(c) \cos \Pi(\alpha) = \cos \Pi(b) \quad (2) \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Tanto en



como en



tendremos

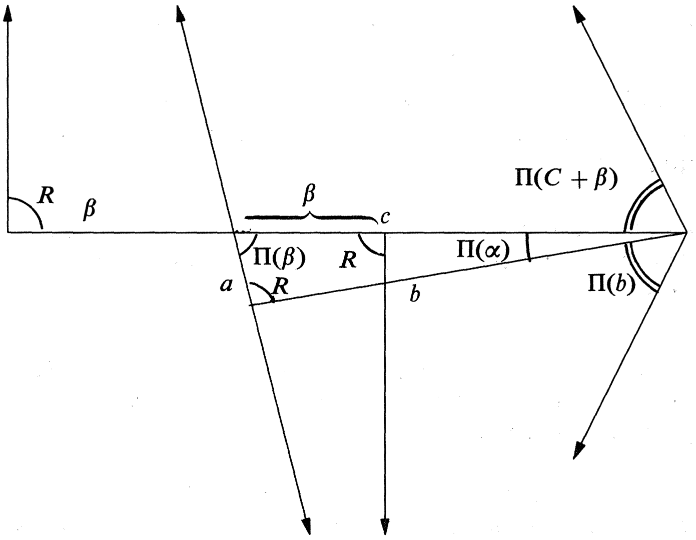
(1) $\operatorname{sen}\Pi(b)\operatorname{sen}\Pi(a)=\operatorname{sen}\Pi(c)$
$\left.\begin{array}{l}(2)\ \cos\Pi(c)\cos\hat{A}=\cos\Pi(b)\\(3)\ \cos\Pi(c)\cos\hat{B}=\cos\Pi(a)\end{array}\right\}$
$\left.\begin{array}{l}(4)\ \cos\hat{A}\operatorname{sen}\Pi(a)=\operatorname{sen}\hat{B}\\(5)\ \cos\hat{B}\operatorname{sen}\Pi(b)=\operatorname{sen}\hat{A}\end{array}\right\}$

(1) $\dfrac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}b}=\dfrac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}a}=\dfrac{1}{\operatorname{sen}c}$
(2) $\cos b\operatorname{sen}\hat{A}=\cos\hat{B}$
(3) $\cos b\cos a=\cos c$

de las que pueden obtenerse todas las restantes fórmulas de trigonometría esférica e hiperbólica.

Se concluye pues, como hizo *Bolyai* que "la trigonometría esférica es la misma tanto si se adopta la hipótesis de que la suma de los tres ángulos de un triángulo rectilíneo sea igual a dos ángulos rectos, como si se adopta la contraria: que tal suma sea menor que dos rectos; lo cual es notable y no tiene lugar para la geometría rectilínea" (Lobachevski, Pangeometría, p. 17). Para obtener fórmulas de trigonometría rectilínea útiles es necesario hallar la función $\Pi(x)$. Es lo que hace a continuación *Lobachevski*.

2. Teorema de las funciones trigonométricas del ángulo de paralelismo.



$$\left.\begin{array}{l}\Pi(\alpha)+\Pi(c+\beta)=\Pi(b)\\[2ex] \Pi(\alpha)+\Pi(b)=\Pi(c-\beta)\end{array}\right\}\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{l}\Pi(b)=\dfrac{1}{2}\Big(\Pi(c+\beta)+\Pi(c-\beta)\Big)\\[2ex] \Pi(\alpha)=\dfrac{1}{2}\Big(\Pi(c-\beta)-\Pi(c+\beta)\Big)\end{array}\right\}$$

Como $\cos\Pi(c)=\dfrac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(\alpha)}$ deducimos

$$\boxed{\tan^2\frac{\Pi(c)}{2}=\tan^2\frac{\Pi(c+\beta)}{2}\tan^2\frac{\Pi(c-\beta)}{2}}$$

y poniendo $\beta = nc$ puede llegarse a

$$\boxed{\left(\tan\frac{\Pi(c)}{2}\right)^x=\tan\frac{\Pi(xc)}{2}}$$

Luego $\tan\dfrac{\Pi(c)}{2}$ es exponencial. Eligiendo la unidad de longitud de modo que $\tan\dfrac{\Pi(1)}{2}=e^{-1}$ se tiene la fórmula

$$\boxed{\tan\frac{\Pi(x)}{2}=e^{-x}}$$

Por tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{sen}\Pi(x)=\dfrac{1}{\cosh x}\\ \cos\Pi(x)=\tanh x\\ \cot\Pi(x)=\operatorname{senh} x\end{array}}$$

Observación. En "la exposición sucinta" y en "Investigaciones geométricas de la teoría de las paralelas" afirma Lobachevski, sin demostración, que $E = e$. El origen de ello es que tomó unidades de medida en dos ocasiones, la primera para hacer $E = e$, la segunda para hacer cotan $\frac{\Pi(1)}{2} = e$. Pero no probó que ambas unidades de medida fueran iguales. Esta laguna, que no existe es la obra de *Bolyai*, fue detectada por éste y a instancias suyas, Lobachevski enmendó la falta en el artículo póstumo "Pangeometría".

Al llegar a este punto del desarrollo de su geometría, en el que ha logrado obtener toda la trigonometría, dice Lobachevski las siguientes interesantes palabras en p. 27 de "Pangeometría":

> "*A partir de estas ecuaciones* [trigonométricas] *la Pangeometría se convierte en geometría analítica, y constituye de este modo una teoría geométrica completa y ......*
>
> *Las ecuaciones [19]* [trigonométricas] *sirven para representar las líneas curvas mediante ecuaciones entre las coordenadas de sus puntos y para calcular la longitud, y el área de la curva; la superficie y el volumen de los cuerpos, como lo demostramos en las memorias científicas de la Universidad de Kazán del año 1829".*

Esta memoria es "Acerca de los principios de la geometría". La frase anterior expresa el convencimiento psicológico por parte de Lobachevski de la consistencia de su geometría. Obsérvese que él cifra esta consistencia en dos puntos; primero, la posibilidad de calcular ecuaciones de curvas y superficies en coordenadas; y segundo, la posibilidad de hallar longitudes, áreas y volúmenes.

La realidad es que lo importante son *las coordenadas* y el *elemento de longitud.* Una vez hallados, se tiene *un modelo de la nueva geometría.* Lobachevski proporciona tres sistemas de coordenadas y obtiene los elementos de longitud. El no es consciente de que con esto tiene ya una demostración de consistencia relativa. Fue Beltrami quien, posteriormente, y poseyendo la idea clara de lo que luego se llamó variedad Riemanniana, entendió que efectivamente allí había un modelo. Beltrami cambió las coordenadas con el fin de que las geodéricas aparecieron como segmentos de rectas (lo cual psicológicamente hacía más claras sus afirmaciones) aunque esto no era necesario.

También aquí Bolyai y Lobachevski están a la par. Ambos definen coordenadas y hallan elementos de longitud. Lobachevski fue más allá que *Bolyai*, sin embargo.

§13. "Acerca de los principios de la Geometría".

Lobachevski también se percata de que "*la Pangeometría da la geometría ordinaria si suponemos las líneas infinitamente pequeñas*". Esto lo ilustra obteniendo las fórmulas de trigonometría euclídea a partir de las hiperbólicas mediante las aproximaciones.

$$\begin{aligned} \cot \Pi(x) &= x \\ \operatorname{sen} \Pi(x) &= 1 - \frac{1}{2} x^2 \\ \cos \Pi(x) &= x \end{aligned}$$

También observa que para cada unidad de longitud (o si se quiere, para cada valor de la constante k en

$$\operatorname{cotan} \frac{\Pi(x)}{2} = e^{\frac{x}{k}} \Big)$$

se tiene en realidad una geometría distinta. Entonces, si el mundo real es hiperbólico debe de corresponder, dice, a un cierto valor de k. El caso euclídeo es $k = \infty$, Lobachevski hizo cálculos astronómicos para lograr el valor de k y concluyó que era demasiado grande para poder ser detectado por sus aparatos de medida. Dice Lobachevski las siguientes interesantes frases:

> "*Después de esto no podemos afirmar más que la hipótesis según la cual la medida de longitud no depende de los ángulos, aunque muchos geómetras quisieran aceptarla como una verdad rigurosa, dejando a un lado la demostración, quizás se revelaría manifiestamente falsa aún antes de que se hayan franqueado los límites del universo visible. Por otra parte, no estamos en posición de saber qué relaciones podrían existir entre los objetos de la naturaleza y unir en ella magnitudes tan diferentes como las rectas y los ángulos. Por lo tanto, es muy probable que las tesis euclidianas sean las únicas verdaderas, aunque jamás sean demostradas. Como quiera que sea, aún si no está dentro de la naturaleza, la nueva geometría, cuya base ya se encuentra presentada aquí, puede, no obstante, existir en nuestra imaginación y, siendo inútil para medidas reales, abre un vasto y nuevo campo para mutuas aplicaciones de la geometría y del análisis*".

Así que la distinción entre el plano lógico y el ontológico es en él clarísima. Además percibe el valor del estudio de la geometría hiperbólica aun cuando no exista realmente. El caso es que él mismo demostró el valor teórico de la nueva geometría aplicándola al cálculo de nuevas integrales, como veremos. Hoy sabemos que la importancia de la geometría hiperbólica no radica solamente en esto, sino más bien en haber dado paso a un nuevo concepto de espacio (y tiempo).

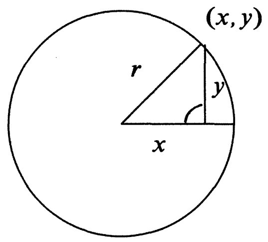
En la memoria "Acerca de los principios de la geometría", además de todo lo dicho anteriormente se contiene un desarrollo detallado de los sistemas de coordenadas con aplicación al cálculo de longitudes áreas y volúmenes. Seguiremos nosotros la "Pangeometría" en donde Lobachevski recogió estos resultados de modo más breve pero más acabado. Todo este material fue publicado por Lobachevski también en su "Geometría Imaginaria" (J. de Crelle, 1837, en francés; Memorias de la Universidad de Kazán, 1835) y en su continuación "Aplicación de la Geometría imaginaria a algunas integrales" (Memorias..., 1836). Es interesante notar que estos trabajos empiezan con las fórmulas trigonométricas y desarrollan luego la nueva geometría. Lo hizo así para librarse de las críticas feroces que tuvo que soportar (véase [K]).

Sin más dilación veamos los sistemas de coordenadas.

1. **Coordenadas rectangulares** (las mismas que *Bolyai*).

   a) *Ecuación de la circunferencia*: Una de las fórmulas trigonométricas del triángulo rectángulo da:

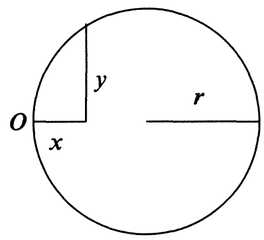
$$\boxed{\operatorname{sen}\Pi(x)\,\operatorname{sen}\Pi(y) = \operatorname{sen}\Pi(r)}$$



También

$$\operatorname{sen}\Pi(r-x)\,\operatorname{sen}\Pi(y) = \operatorname{sen}\Pi(r)\,.$$

$$\cosh(r-x)\cosh(y) = \cosh(r)\,.$$



   b) *Ecuación del horociclo*: En la fórmula anterior

$$(e^{r-x} + e^{-r+x})(e^{y} + e^{-y}) = 2(e^{r} + e^{-r})\,.$$

$$(e^{-x}+e^{x-2r})(e^{y}+e^{-y})=2(1+e^{-2r})$$

hacemos tender $r \longrightarrow \infty$:

$$e^{-x}(e^{y}+e^{-y})=2$$

$$\boxed{\tan \frac{1}{2}\Pi(x) = \operatorname{sen}\Pi(y)}$$

c) *Elementos de arco*, explícitamente lo calcula:

$$ds = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{\operatorname{sen}^2 \Pi(y)}}$$

d) *Rectificación del horociclo.* Lo hace geométricamente y también por integración. Como la ecuación es

$$e^{-x} = \tan \frac{1}{2}\Pi(x) = \operatorname{sen}\Pi(y)$$

será

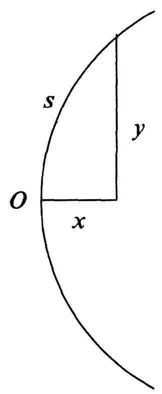
$$x = -\log \operatorname{sen}\Pi(y) = -\log \frac{1}{\cosh x}$$

luego

$$\frac{dx}{dy} = \tanh(x)$$

Por tanto

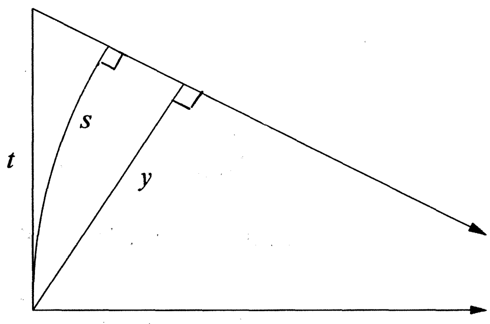
$$l = \int_0^y \sqrt{\tanh^2 (y)\cosh^2 (y)+1}\, dy$$



luego

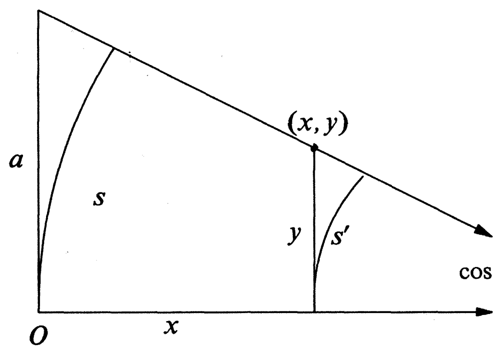
$$\boxed{s = \operatorname{senh}(y) = \cot \Pi(y)}$$

De aquí deduce Lobachevski en su "Pangeometría" que $E = e$ como sigue: Usando trigonometría y la fórmula anterior deduce



$s = \cos \Pi(t)$

Calcula la ecuación de la recta usando trigonometría y obtiene:



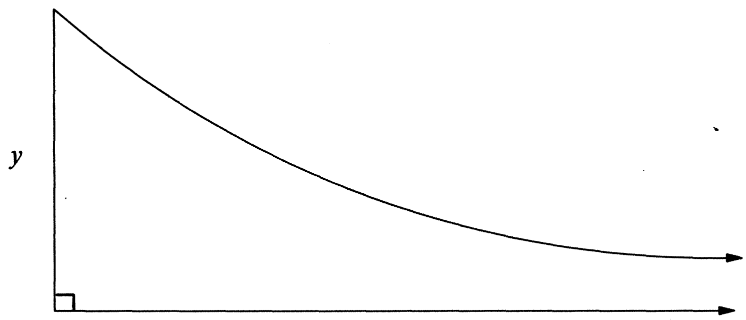
$\cos \Pi(y) = \cos \Pi(a)\, e^{-x}$

Como

$$s = \cos \Pi(a), \quad s' = \cos \Pi(y)$$

es $\dfrac{s'}{s} = e^{-x}$, luego $E = e$.

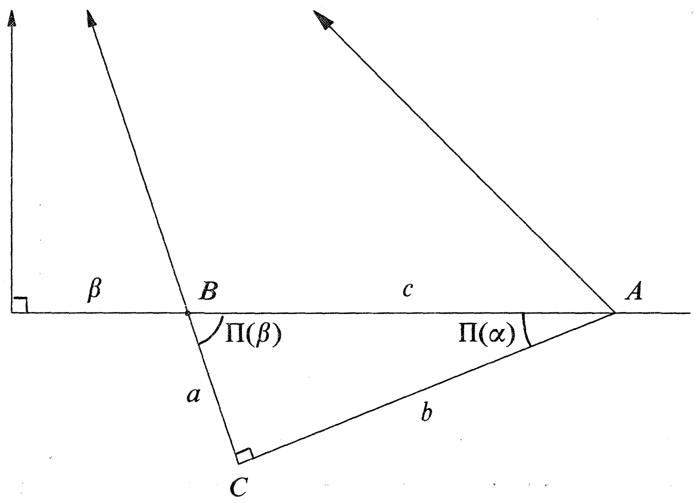
e) *El área del triángulo.* Primeramente calcula el elemento de área y luego determina el área del triángulo



que resulta ser

$$\frac{\pi}{2} - \Pi(y)$$

Entonces



implica que el área de $\overset{\Delta}{ABC}$ es

$$\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(b)\right) - \left(\left[\frac{\pi}{2} - \Pi(\beta + c)\right] - \left[\frac{\pi}{2} - \Pi(\beta)\right]\right) =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \Pi(b) + \Pi(\beta + c) - \Pi(\beta)$$

Como

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c + \beta)$$

es

$$\boxed{\text{área } (\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha) - \Pi(\beta)}$$

de la que se deduce la igualdad entre área y defecto del triángulo en general.

2. **Coordenadas polares.**

El elemento de longitud es

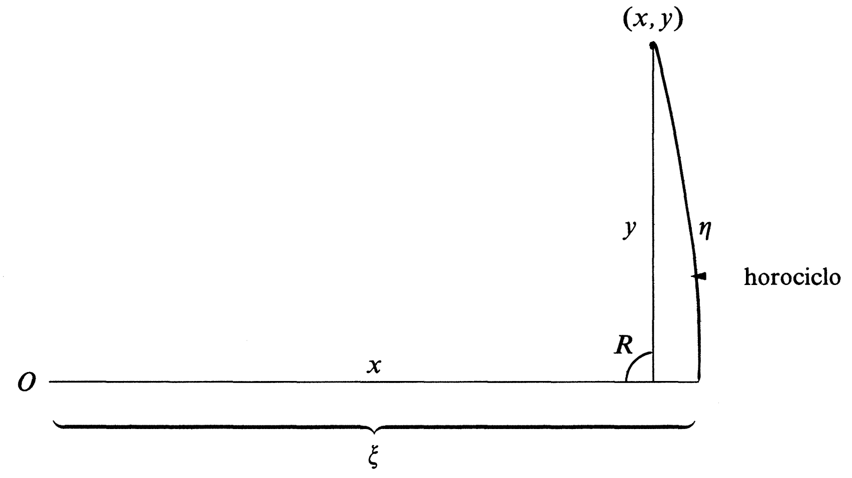
$$\boxed{ds = \sqrt{dr^2 + d\varphi^2 \operatorname{cotan}^2 \Pi(r)}}$$

Con él rectifica la circunferencia de radio r obteniendo

$$2r \operatorname{cotan} \Pi(r)$$

3. **Coordenadas de un haz impropio.**

En la Pangeometría se consideran también las coordenadas con respecto a un haz impropio, una vez consideradas las coordenadas con respecto a un haz ideal (rectangulares), o a un haz propio (polares):



$$\eta = \operatorname{cotan} \Pi(y) = \operatorname{senh}\, y$$

Como la ecuación del horociclo es

$$\tan \frac{1}{2} \Pi(-x + \xi) = \operatorname{sen} \Pi(y)$$

tendremos

$$e^{-\xi + x} = \operatorname{sen} \Pi(y)$$

$$e^{-x+\xi} = \cosh\, y$$

luego:

$$\boxed{\begin{array}{l} \eta = \operatorname{senh}\, y \\ e^{-x+\xi} = \cosh\, y \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} \eta = \operatorname{senh}\, y \\ x = \xi - \dfrac{1}{2} \log(1 + \eta^2) \end{array}}$$

El elemento de longitud (que no da *Lobachevski* explícitamente) es

$$\boxed{ds = \sqrt{(1 + \eta^2)\, d\xi^2 - 2\eta\, d\xi\, d\eta + d\eta^2}}$$

y el de área es

$$\boxed{dS = d\xi\, d\eta}$$

resultado muy interesante.

El resto de la memoria (y de la "Pangeometría" y de la "Geometría imaginaria") se dedica a hallar volúmenes de conos y tetraedros. Además, como es posible calcular áreas por dos procedimientos; a saber, geométrico (por división del polígono en triángulos) y por cálculo integral, se dedica Lobachevski, con gran maestría a realizar varios de estos cálculos. De este modo obtiene el valor de muchas integrales. Alguna de ellas eran conocidas, otras no. Las conocidas, le reafirman en la consistencia de su "Pangeometría"; las otras, le confirman que su teoría es útil.

§14. Lobachevski y Gauss.

Por la carta de *Gauss* a *Farkas Bolyai* sabemos que el camino seguido por *Gauss* en su desarrollo de la geometría hiperbólica debió ser casi el mismo que el de Juan Bolyai.

Pero ya hemos visto que Lobachevski desarrolla su geometría de modo distinto a Bolyai. (Se nos antoja que de un modo más elegante pero menos profundo.) Tuvieron pues que interesar a Gauss estos nuevos puntos de vista. Y así fue en efecto. He aquí lo que dice en 1846 a Schumaker:

> "*Ultimamente tuve motivos para releer el opúsculo de Lobachevski (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, at G. Finke, 4 firmas). Este trabajo contiene los fundamentos de la geometría que se obtendría –y forma un conjunto coherente– si la geometría Euclídea no fuera cierta. Cierto Schweikart llamó "astral" a esta geometría, Lobachevski la llama "imaginaria". Tú sabes que durante 54 años (desde* 1792*) he compartido los mismos puntos de vista, con algunos desarrollos adicionales sobre los que no quiero entrar ahora; así que yo no he encontrado nada verdaderamente nuevo para mí en la obra de Lobachevski, pero al desarrollarla el autor sigue una vía diferente a la mía y hace demostración de un arte consumado, de un espíritu verdaderamente geométrico. Considero mi deber llamar tu atención sobre ese libro que, sin duda, te complacerá mucho*"
>
> ([G] p.238)

Esto demuestra que Gauss vio en el trabajo de Lobachevski aspectos nuevos para él. Se explica así su interés por la obra de Lobachevski y su aparente frialdad con el trabajo de Bolyai. Véase lo que dice en 1841 a J. F. Encke:

> "*Estoy haciendo razonables progresos en ruso y esto me proporciona gran gusto. Mr. Knorre me envió una pequeña memoria de Lobachevski (en Kazán), escrita en ruso, y esta memoria, así como su opúsculo en alemán sobre líneas paralelas (apareció una nota absurda sobre él en Repertorium de Gersdorff) ha despertado en mí el deseo de averiguar más acerca de este inteligente matemático. Según me dijo Knorre, muchos de sus artículos están en la revista rusa Memorias de la Universidad de Kazán.*" ([G] p. 232)

Gauss logró que Lobachevski fuera elegido miembro correspondiente de la Sociedad Científica de Gotinga en 1842. Así el peso del gran matemático alemán a favor de Lobachevski influyó para que las miradas de los científicos empezaran a converger en la obra de Lobachevski.

Los detalles de este proceso de divulgación, en el mundo científico de esta gran obra pueden verse en [K], por ejemplo.

AGRADECIMIENTOS

A los Profesores José Fernández Prida y José Ruiz por haberme sugerido (y prestado) parte de las referencias y por interesantes conversaciones sobre lógica y geometría hiperbólica, respectivamente.

BIBLIOGRAFIA

[B] ROBERTO BONOLA: "Geometrías no euclidianas" Espasa Calpe S.A. Madrid, 1945.

La versión inglesa publicada por Dover Publications, Inc. New York (1955), contiene traducción de G. B. Halsted del "Apéndice" y de "Investigaciones geométricas", así como noticias biográficas de *Bolyai* y *Lobachevski.*

El libro de Bonola es un clásico: equilibrado y hermosamente escrito.

[JB] FERENC KÁRTESZI Y BARNA SZÉNÁSSY: "Janos Bolyai, Appendix the theory of space" Akadémiai Kiadó, Budapest 1987.

Este es un libro excelente. Ligeramente partidista a favor de Bolyai. Contiene facsímil del Apéndice", traducción al inglés con notas. Hay una biografía de Bolyai, entre otras interesantes cosas más.

[R] B.A. ROSENFELD: "A history of non–euclidean geometryy". Springer Verlag, 1988.

El libro de Rosenfeld abarca demasiado, es partidista, pero tiene interesantes citas antiguas y modernas, y una copiosa bibliografía.

[G] K. GAUSS: Obras completas vol. 8. Teubner, Leipzig (1900)

[K] V. F. KAGÁN: "Lobachevski" M.I.R. Moscú (1986).

Este es un libro muy completo pero lleno de prejuicios y altamente partidista. Los aspectos matemáticos son interesantes pero hay que contrastarlos con el original, pues me parece que ciertos pasajes de Lobachevski están ligeramente perfeccionados en el texto. Alguna frase sobre Bolyai es grotesca.

P. STÄCKEL Y F. ENGEL: Gauss, les deux Bolyai et la Geómétrie non Euclidienne, traducido por L. Laugel de Math. Ann. 49 (1897) 149–167. Contiene interesantes cartas entre *Gauss* y *Bolyai*

[M] J. M. MONTESINOS-AMILIBIA:"Los modelos clásicos de la geometría hiperbólica" (en preparación)

Otros libros interesantes:

J. GRAY: "The discovery of non–euclidean geometry" Studies in the history of Math. MAA Studies in Math. E. Philips (ed.) 1987.

J. GRAY: "Non–euclidean geometry a re–interpretation" Historia Math 6 (1979) 236–258.

J. FRISCHAUF: Absolute Geometrie nach Johann Bolyai, Teubner Leipzig 1872.